<삼각함수>

* 삼각함수의 여러 공식은 이미 다 아는 것으로 간주함. 또한 드무아브르 정리도 아는것으로 간주.

문제 1) (1966 IMO) 자연수 n 에 대해

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\cot x-\cot 2^n x$$

임을 보여라. (단 $x \neq k\pi/2^t$, $t=0,1,\cdots,n$, k : 정수)

문제 2) $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ 일때

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\ \tan\beta\ \tan\gamma$$ 임을 증명하시오.

예제 1) $\sum_{k=1}^{n}\cos kx$ 와 $\sum_{k=1}^{n}\sin kx$ 의 값을 구하라. (단 $\sin\frac{x}{2}\neq 0$)

(해설) ① $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_n$ 을 이용하는 방법

→ *Telescoping sums theorem*

② 복소수를 이용한다 —— 드무아브르 정리

여기서 다음을 소개한다

< 극형식 … (실수)의 허수승 >

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$ → 식을 간단히 쓸수 있다

<과제> 지수법칙이 허수지수를 포함한 복소수 지수에서 성립함을 확인하라.

(풀이) ① $A=\sum_{k=1}^{n}\cos kx$ 라 두자

$$A\sin\frac{x}{2}=\sum_{k=1}^{n}\cos kx\sin\frac{x}{2}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{x}{2}\right)$$
$$=\cos\frac{n+1}{2}x\ \sin\frac{n}{2}x$$
$$\therefore A=\frac{\cos\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\sum_{k=1}^{n}\cos kx$$

$B=\sum_{k=1}^{n}\sin kx$ 라 두자

$$B\sin\frac{x}{2}=\sum_{k=1}^{n}\sin kx\sin\frac{x}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\cos\frac{1}{2}x\right)$$

$$= \sin\frac{(n+1)}{2}x \quad \sin\frac{n}{2}x$$

$$\therefore B = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \ \sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} = \sum_{k=1}^{n}\sin kx$$

Note 1) 각이 등차수열이 되는 삼각함수의 수열의 합 구하기
$\boxed{1}$: sin (공차의 반각) 을 곱하고 생각한다.

② $\sum_{k=1}^{n}\cos kx + i\sum_{k=1}^{n}\sin kx$

$$= \sum_{k=1}^{n}(\cos kx + i\sin kx)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} e^{ikx}$$

$$= \frac{e^{ix}(1-e^{inx})}{1-e^{ix}} \quad \leftarrow \boxed{\text{등비수열의 합}}$$

$$= e^{ix}\frac{2\sin\frac{nx}{2}\ e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{n}{2}x)}}{2\sin\frac{x}{2}\cdot e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2})}} \quad *$$

$$= \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\ e^{i(\frac{n+1}{2}x)}$$

$$= \frac{\sin\frac{nx}{2}\ \cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} + i\,\frac{\sin\frac{nx}{2}\ \sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

(주의) 이것을 e^{ix}를 쓰지않고 표현한다면 "드무아브르 정리"를 잘 알아야 한다. 이 풀이를 고교과정 내의 형식으로도 충분히 표현할수있다!

$\cos x$ $\sin x$는 실수이므로, 실수부, 허수부 비교하면

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\ \cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\ \sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

* 부분 증명

$$1-e^{i\theta} = (1-\cos\theta) - i\sin\theta$$

$$= 2\sin^2\frac{\theta}{2} - 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$= 2\sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2})}$$

Note 2) 각이 등차수열이 되는 삼각함수의 수열의 합 구하기
$\boxed{2}$: 복소수를 이용하면, 쉬울 수 있다.

문제 3) ① $\sum_{k=1}^{n} 2^k \cos kx$ 를 구하시오.
② $\sum_{k=1}^{n} k\sin kx$ 를 구하시오.
③ $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k \sin kx$ 를 구하시오.

예제 2) $\cos\frac{\pi}{65}\cos\frac{2\pi}{65}\cos\frac{4\pi}{65}\cos\frac{8\pi}{65}\cos\frac{16\pi}{65}\cos\frac{32\pi}{65}$ 를 구하여라.

(해설) 각이 1, 2, 4, 8, 16, 32 ⋯ 등비수열, 공비: 2

(풀이) $A=\cos\frac{\pi}{65}\cos\frac{2\pi}{65}\cos\frac{4\pi}{65}\cos\frac{8\pi}{65}\cos\frac{16\pi}{65}\cos\frac{32\pi}{65}$

$$
\begin{aligned}
&A\sin\frac{\pi}{65}\\
&=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{65}\cos\frac{2\pi}{65}\cos\frac{4\pi}{65}\cos\frac{8\pi}{65}\cos\frac{16\pi}{65}\cos\frac{32\pi}{65}\\
&=\frac{1}{2^2}\sin\frac{4\pi}{65}\cos\frac{4\pi}{65}\cos\frac{8\pi}{65}\cos\frac{16\pi}{65}\cos\frac{32\pi}{65}\\
&=2^{-3}\sin\frac{8\pi}{65}\cos\frac{8\pi}{65}\cos\frac{16\pi}{65}\cos\frac{32\pi}{65}\\
&=2^{-4}\sin\frac{16\pi}{65}\cos\frac{16\pi}{65}\cos\frac{32\pi}{65}\\
&=2^{-5}\sin\frac{32\pi}{65}\cos\frac{32\pi}{65}\\
&=2^{-6}\sin\frac{64}{65}\pi
\end{aligned}
$$

$\therefore A=2^{-6}$

> Notes, cos 이 곱해져있고, 각이 2배씩 증가할때는
> 최소인 각의 sin을 곱한후, 2배각 sin 공식을 반복적용한다.

문제 4) $\prod_{k=1}^{n}\cos 2^k x$ 를 간단히 하여라. ($\sin x\neq 0$ $\sin 2^n x\neq 0$)

예제 3) 다음과 같은 수열 a_n 과 b_n 을 생각하자.
(1986 IMO 후보문제)

$$a_0=\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad a_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-a_n^2}}\qquad (n=0,1,2\cdots)$$

$$b_0=1\qquad b_{n+1}=\frac{\sqrt{1+b_n^2}-1}{b_n}$$

이 때 다음을 증명하라.

$$2^{n+2}a_n<\pi<2^{n+2}b_n\qquad (n=0,1,2\cdots)$$

(해설) a_0를 보고, 점화식을 본후 뭐가 떠오르는가?
관심을 가질것은 a_n, b_n 의 일반항이 삼각함수라는 것이다.
부등식은 $\sin x<x<\tan x$ ($0<x<\frac{\pi}{2}$) 라는
식에서. 이끌어낼 수 있을 것이다. (이 부등식은 수II 함
함수의 극한 중 $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ 증명할 때 나온다)

(풀이) $a_0=\sin\frac{\pi}{4}$

$a_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{8}}=\sin\frac{\pi}{8}$

⋮

$$b_0 = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$b_1 = \frac{\sec\frac{\pi}{4} - 1}{\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sin^2\frac{\pi}{8}}{2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}} = \tan\frac{\pi}{8}$$

$\vdots$

(추측) (수학적 귀납법 쓸곳)

$$a_n = \sin(2^{-n-2}\pi) \qquad b_n = \tan(2^{-n-2}\pi) \quad \cdots ①$$

($\because$) i) $n=0$ 일때 성립함.

ii) $n=k$ 일때 $a_k = \sin 2^{-k-2}\pi$, $b_k = \tan 2^{-k-2}\pi$ 라 하자.

$$a_{k+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos 2^{-k-2}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2\sin^2 2^{-k-3}\pi} = \sin 2^{-k-3}\pi$$

$$b_{k+1} = \frac{\sec 2^{-k-2}\pi - 1}{\tan 2^{-k-2}\pi} = \frac{1-\cos 2^{-k-2}\pi}{\cos 2^{-k-2}\pi} = \frac{2\sin^2 2^{-k-3}\pi}{2\sin 2^{-k-3}\pi\cdot\cos 2^{-k-3}\pi} = \tan 2^{-k-3}\pi$$

따라서 모든 자연수, 0 인 n에서 ①이 성립한다.

$\sin x < x < \tan x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$ 에서

$$a_n < 2^{-n-2}\pi < b_n$$

$$\therefore 2^{n+2}a_n < \pi < 2^{n+2}b_n \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

문제 5) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 일때 $\sin x < x < \tan x$ 를 증명하여라.
(미분을 써도 좋지만, 쓰지 않는 풀이를 원함)

문제 6) 다음의 무한곱이 수렴할 경우 그 값을 구하라.

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times \cdots\cdots$$

문제 7) $-1 < a_0 < 1$ 이고 $a_n = \sqrt{\frac{1+a_{n-1}}{2}}$, $n > 0$ 이다.

• $A_n = 4^n(1-a_n)$ 이라 하자. $n\to\infty$ 일때 A_n은 어떻게 되는가? (수렴한다면 그 값을 구하라

예제 4) $\sin\frac{\pi}{n}\ \sin\frac{2\pi}{n}\ \sin\frac{3\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$ 를 구하여라

(해설) 앞페이지에 나오는데 다시 써 보겠다

$$1-e^{i\theta}=1-\cos\theta-i\sin\theta$$
$$=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=2\sin\frac{\theta}{2}\ e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$$
$$\therefore\ |1-e^{i\theta}|=2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$$
$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\,|1-e^{i\theta}|$$

(풀이) $w=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ 라 하자.

$w^n=1$ 이므로

$x^n-1=0$ 의 근은 $w^0, w^1, w^2, \cdots, w^{n-1}$ 이다.

$(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)=0$ 에서

$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=0$ 의 해는 $w, w^2, w^3, \cdots, w^{n-1}$ 이다.

따라서

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=(x-w)(x-w^2)(x-w^3)\cdots(x-w^{n-1})$$

그런데 $x=1$ 을 대입하면

$$n=(1-w)(1-w^2)\cdots(1-w^{n-1})$$

양변 절대값

$$n=|1-w||1-w^2|\cdots|1-w^{n-1}|$$

한편 $|1-w^k|=\left|1-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}\right|$

$$=\left|2\sin^2\frac{k\pi}{n}-i\,2\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right|$$
$$=2\sin\frac{k\pi}{n}\left|\sin\frac{k\pi}{n}-i\cos\frac{k\pi}{n}\right|$$
$$=2\sin\frac{k\pi}{n}$$

$$\therefore\ n=2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi$$
$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi=\frac{n}{2^{n-1}}$$

(IMO 1963) 문제 8) $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$ 임을 보여라.

문제 9) $\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}=0$ 임을 증명하라.

(Hint : $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$)

문제 10) 자연수 n에서

$$\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha+\cdots+\sin(2n-1)\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha+\cdots+\cos(2n-1)\alpha}=\tan n\alpha$$ 임을 증명하라.

문제 11) $\sin^2\frac{\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7}\sin^2\frac{3\pi}{7} = \frac{7}{64}$ 임을 보여라

헝가리 1906/1 문제 12) $\tan\frac{\alpha}{2}$가 유리수이면 $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ 가 유리수임을 증명하라.
또한 $\tan\frac{\alpha}{2}$가 정의될때, $\cos\alpha$, $\sin\alpha$가 유리수이면
$\tan\frac{\alpha}{2}$도 유리수 임을 증명하라.

Note 4) $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

문제 13) 다음식의 값을 구하시오.
$\left(\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}\cos\frac{3\pi}{n}\cdots\cos\frac{n-1}{n}\pi\right)^2$

문제 14) $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ 일때
$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ 임을 보여라.

문제 15) $\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma = 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}$ 임을 보여라.

문제 16) $\cos\frac{\pi}{20}\cos\frac{3\pi}{20}\cos\frac{7\pi}{20}\cos\frac{9\pi}{20} = -\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}$ 임을 보여라.

문제 17) $\tan\alpha=\frac{1}{7}$, $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$ 이면 $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}$ 임을 보여라. 단 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$