< 해석학 >

1. 연속 함수 (Continous Functions)

실수치 함수 f가 a에서 연속이라 함은 $x \to a$ 일때 $f(x) \to f(a)$임을 말한다.
더 정확히 정의하자면 다음과 같다.

① $f(a)$ 값이 정의되고

② $\lim_{x \to a} f(x)$ 값이 존재하고

③ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

함수 f가 구간 D에서 연속이라 함은 D의 모든 점에서 연속임을 말한다.
f가 a에서 연속인 것과 a로수렴하는 임의의 수열 $\{x_n\}$ 이 있을때, 이 수열 $\{f(x_n)\}$ 이 $f(a)$로 수렴한다는 것은 필요충분조건이다. 증명은 어렵지 않다. 이것은 어떤 점에서 함수가 불연속임을 증명할 때 잘 사용된다.

예를 들어
$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$
은 $x=0$ 에서 불연속이다. 왜냐하면 $x_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ 라고 했을때 $n \to \infty$ 일때 $x_n \to 0$ 이다. 그런데 $\{f(x_n)\} = \{\sin(2\pi n + \frac{\pi}{2})\}$ 는 1로 수렴하므로 연속이 아니다.

1.1. $f : [0,1] \to [0,1]$ 인 함수 f를 생각한다.
$a = 0.a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots$ (10진법 표기) 일때
$f(a) = 0.0\,a_1\,0\,a_2\,0\,a_3\,0\,a_4 \cdots$ 로 정의한다. f의 연속성을 논하라.
(단 a는 가능한 유한소수로 표기한다. ex) $0.0999\cdots \to 0.1$)

(sol.) f가 단조증가 함수임을 알 수 있다. 우리는 f가 유한소수에서 불연속임을 보이겠다.
예를 생각해보자. $a = 0.413$ 인 경우 $f(a) = 0.040103$ 이다.
수열 $\{x_n\}$을 다음처럼 만들자

$$x_1 = 0.4129$$
$$x_2 = 0.41299$$
$$x_3 = 0.412999$$
$$\vdots$$
$$x_n = 0.412\underbrace{99\cdots9}_{n\text{번}}$$

이때 $x_n \to a$ 지만, $f(x_n) = 0.040103\overbrace{0909\cdots09}^{n\text{번}}$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$ 이다. 따라서 f는 a에서 불연속이다.
유사한 방법으로, f가 각각의 유한소수에서 불연속임을 보일수 있다.
이 풀이는 유한소수가 십진법으로 2가지 방법으로 표현할 수 있음에 기초한 것이다.

이제, $a \in (0,1)$ 이 무한소수인 경우를 생각하자. 우리는 f가 a에서 연속임을 보이려 한다. a가 무한소수이므로, (또한 9가 순환마디가 될 수 없음)
$a_n \neq 0$ 이고 $a_{n+1} \neq 9$ 인 n이 무한히 존재한다. 그런 n에 대하여
(여기서 $a = 0.a_1 a_2 a_3 \cdots$ 이다.)
수열 X_n과 Y_n을 정의하자.

$$X_n = 0.a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \qquad \left(= \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i}\right)$$
$$Y_n = 0.a_1 a_2 a_3 \cdots a_n (a_{n+1}+1) = X_n + \frac{a_{n+1}+1}{10^{n+1}}$$

그러면 $a \in (X_n, Y_n)$ 이다.
또한, (X_n, Y_n)의 임의의 수의 첫 n개의 숫자는 모두 같으므로 $(X_n, Y_n$과$)$
$(X_n, Y_n) \xrightarrow{f} (f(X_n), f(Y_n))$ 이다.
$\{X_n\}, \{Y_n\}$이 각각 a로 수렴하는 것은 명백하다. 더불어, $\{f(X_n)\}, \{f(Y_n)\}$도 $f(a)$로 수렴한다.
이제 임의의 수열 $\{x_n\}$이 $n\to\infty$일때 $x_n \to a$ 라고 하자.
최후에는, 수열 $\{x_n\}$은 $(\forall n)$ (X_n, Y_n) 내부가 된다. 따라서 $f(x_n) \to f(a)$ $(n\to\infty)$ 이다. 즉 f는 a에서 연속이다.

앞의 문제는 그림으로 나타내기 어렵고, 연속성에 관한 완벽한 이해가 요구된다.
다음 예제는 다음 정의를 이해해야 한다.
「 함수 f가 a에서 연속
$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ 에 대하여
$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ 로 되는 $\delta > 0$ 가 존재함. 」

1.2. 함수 f가 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 인 (연속) 일대일함수이다. 그리고 $f(x_0) = x_0$ 인 x_0가 존재한다. 또한, $f(2x - f(x)) = x$ 가 항상 성립한다.
$f(x) \equiv x$ 임을 증명하라.
※ $f(x) \equiv g(x) \Leftrightarrow \forall x,\ f(x) = g(x)$

(sol) 집합 $S = \{x \mid f(x) = x\}$ 라 한다.
f가 연속이므로 S는 폐집합 (closed set) 이다.
(i.e. 만약 $x_n \in S$, $x_n \to x$ 이면 $x \in S$
$\because\ x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x)$)
$S \neq \mathbb{R}$ 라고 가정하자.

x_0를 S의 경계점 (boundary point) 라고 하자
(i.e. x_0의 임의의 근방을 택해도 S의 원소가 아닌 것이 존재한다
$\therefore$ $x_0 \in S$ 이다 ($\because$ S가 폐집합))

$y \notin S$ 라면 $f(y) = y + r$ $r \neq 0$ 인 r 이 존재한다

이때 ① $f(2(y+r) - f(y+r)) = y + r = f(y)$ 이므로

$$2y + 2r - f(y+r) = y \quad \therefore f(y+r) = y + 2r$$

② $f(y+nr) = y + nr + r$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 로 가정하면

$$f(2y + 2(n+1)r - f(y+(n+1)r)) = y + (n+1)r = f(y+nr)$$

일대일함수이므로 $2y + 2(n+1)r - f(y+(n+1)r) = y + nr$

$$f(y+(n+1)r) = y + (n+1)r + r$$

즉 모든 자연수 n에서 $f(y+nr) = (y+nr) + r$

자 이제, 풀이에 대한 생각은 다음과 같다

❗: $x \notin S$ 라 가정하자. $y \in R - S$ 로 하는데 y를 x_0에 가깝게, $f(y)$를 y에 가깝게 y를 택하자 (연속이니까 생각할 수 있을 것 같다) 만약 $f(y) = y + r$ 이고 r이 충분히 작다면, 아마도 "$f(y+nr) = (y+nr) + r$" 라는 것이 연속성에 모순일 걸로 생각된다.

형식적인 틀에 맞춰 증명해보자.

x_0를 S의 경계점이라 하고, x는 $f(x) \neq x$ 인 것으로 하자.
$\varepsilon = |f(x) - x|$ 라 두자.

f가 연속이므로, $|z - x| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$ 가 성립하는 δ이 존재한다. 이때 $\delta \leq \frac{1}{4}\varepsilon$ 라 가정해도 무리없다.

f가 x_0에서 연속이므로, $|w - x_0| < \eta \Rightarrow |f(w) - f(x_0)| < \delta$ 가 성립하도록 하는 $0 < \eta < \delta$이 존재한다

이제 $y \in (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$, $f(y) \neq y$ 라고 하자.
$\because$ x_0가 S의 경계점이니 이런 y가 반드시 존재.

$$\begin{aligned} 0 < |f(y) - y| &\leq |f(y) - f(x_0)| + |f(x_0) - y| \\ &= |f(y) - f(x_0)| + |x_0 - y| \\ &< \delta + \eta \\ &< 2\delta \end{aligned}$$

$r = f(y) - y$ 라 하자 (주의: r은 음수일 수 있다!)
$0 < |r| < 2\delta$ 이므로, $y + nr \in (x - \delta, x + \delta)$ 인 n 이 존재한다

이때 $$\begin{aligned} \varepsilon &= |f(x) - x| \\ &\leq |f(x) - f(y+nr)| + |f(y+nr) - x| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + |(y+nr) + r - x| \\ &\leq \frac{1}{4}\varepsilon + |(y+nr) - x| + |r| \end{aligned}$$

$< \frac{1}{4}\varepsilon + \delta + 2\delta$

$< \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon$

$= \varepsilon$

모순! 즉 $S \neq \mathbb{R}$ 은 잘못. $\therefore S = \mathbb{R}$ → 증명끝

폐구간 $[a,b]$ 위에서 연속함수에 관한 두가지 매우 중요한 사실이 있다. 하나는 최대, 최소값을 가진다는 것이고, 다른 하나는 최대, 최소값 사이의 임의의 값을 취할 수 있다는 것이다. 이것은 다음 두 정리의 내용이다.

최대값최소값정리 (Extreme-Value Theorem)

f가 $[a,b]$ 에서 연속일때

$f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ (단 $\forall x \in [a,b]$ 에서) 를 만족하는

c, d가 $[a,b]$ 에 있다

(이때 c가 최소값, d가 최대값이다)

중간값정리 (Intermedrate-Value Theorem)

f가 $[a,b]$에서 연속이고, $f(a) < y < f(b)$ (또는 $f(b) < y < f(a)$)이면

$f(c) = y$ 인 $c \in (a,b)$ 존재.

이것들의 증명은 다양한 방법이 있다. 나는 지금 중간값정리를 다른 문제에도 활용할수있는 반복 이등분법으로 증명하려 한다.

f가 폐구간 $[a,b]$ 에서 연속함수이고, $f(a) < f(b)$ 라고 가정하자. (다른 경우 즉 $f(a) > f(b)$ 인 경우도 마찬가지로 할 수 있다)

$y \in [f(a), f(b)]$ 라고 하자.

$a_0 = a,\ b_0 = b$

라고 하자. x_1을 구간 $[a_0, b_0]$의 중점이라 하자. 만약 $f(x_1) < y$ 이면

$a_1 = x_1,\ b_1 = b_0$

라고하고, $y \leq f(x_1)$ 이면 $a_1 = a_0$ $b_1 = x_1$ 라 하자.

각 경우에 $f(a_1) \leq y \leq f(b_1)$ 이고 $[a_1, b_1]$의 길이는 $[a,b]$ 길이의 반이다.

이제 x_2를 $[a_1, b_1]$의 중점이라 하고, $f(x_2) < y$ 이면

$a_2 = x_1 \quad b_2 = b_1$

라고 하고 $f(x_2) \geq y$ 이면 $a_2 = a_1$, $b_2 = x_2$ 라고 하자.

이때에도 $f(a_2) \leq y \leq f(b_2)$ $b_2 - a_2 = \frac{b-a}{4}$ 이다.

이것을 계속 반복하자

이때 다음과 같은 폐구간들의 열을 생각해보자

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$$

이 것들의 길이는 0 으로 수렴하므로, $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ 는 같은 값으로 수렴한다. 그 값을 c 라고 하자

f의 연속성에 의하여

$$\lim_{i\to\infty} f(a_i) = f(c), \qquad \lim_{i\to\infty} f(b_i) = f(c)$$

그런데 $f(a_i) \le y \le f(b_i)$

따라서 $i\to\infty$ 일때

$$f(c) = \lim_{i\to\infty} f(a_i) \le y \le \lim_{i\to\infty} f(b_i) = f(c)$$

$\therefore f(c) = y$, 따라서 정리는 증명되었다.

최대최소 정리도 유사한 방법으로 증명할수있고, 문제 (1.5)로 남겨둔다.

Problems.

1.3. f가 $a \le x \le b$ 에서 유계이다.
또한 $a \le x_1 \le x_2 \le b$ 인 x_1, x_2에서

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{1}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right) \quad \text{이다.}$$

f가 (a,b) 에서 연속임을 보여라.
(힌트! $f(x+\delta) - f(x) \le \frac{1}{2}\left(f(x+2\delta) - f(x)\right) \le \cdots$
$\le \left(\frac{1}{2}\right)^n [f(x+2^n\delta) - f(x)]$, $a < x+2^n\delta < b$.
임을 보이고, $\delta \to 0$ 로 한다.)

1.4. 실수치 연속함수가 실수 x, y 에 대해 다음 함수 방정식을 만족한다.

$$f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(x)\, f(y)$$

$f(x) = [f(1)]^{x^2}$ 임을 증명하라. (단 $f(1) \ne 0$)
(힌트! 먼저 n이 정수일때 $2^{\frac{n}{2}}$ 꼴 수에 대해 증명하고, 모든 수를 $\frac{m}{2^n}$ 꼴로 (m : 정수, n은 음이 아닌 정수) 나타내어 증명한다)

1.5. 반복 분할 방법으로 최대최소 정리를 증명하라.

1.6. $f(0) > 0$. $f(1) < 0$ 이다. 이 함수 f에 대해, $f+g$ 가 감소하지 않는 함수가 되는 연속함수 g가 존재한다. $f(x) = 0$ 인 x가 존재함을 증명하라.
(힌트! 반복분할 방법을 사용해라. 오른쪽 반에 $f(x) \ge 0$ 인 x가 존재하면 그것을 택하고, 그렇지 않으면 왼쪽 반을 택해라. 이렇게 해서 구간 축소 수열
$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots$ 를 얻을수있는데, 이것은 c 라는 점으로 수렴한다.

각각의 n에 대해 $[a_n, c]$에서는 $f(y_n) \geq 0$ 인 y_n이 있음에 유의하라. 이때 $f(c)=0$임을 증명하라.)

1.7. f는 $[0,1]$에서 다음과 같이 정의된 함수이다.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x\text{가 무리수}) \\ \frac{1}{q} & (x=\frac{p}{q},\ q>0,\ p,q\text{는 서로소인 정수}) \end{cases}$$

(a) f가 $[0,1]$의 각각의 유리수에서 불연속임을 증명하라.

(b) f가 $[0,1]$의 각각의 무리수에서 연속임을 증명하라.

1.8. x가 칸토르집합 K (Cantor set)의 원소이면

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2b_n}{3^n} \qquad b_n = 0 \text{ or } 1$$

의 형태로 유일하게 표현된다.

이때 함수 $g : K \longrightarrow [0,1]$을

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}$$

로 정의한다. 이 때, g가 연속임을 증명하라.

2. 중간값 정리 (The Intermediate-Value Theorem)

<중간값정리> f가 폐구간 $[a,b]$에서 연속이고, d가 $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있는 수이면

$f(c)=d$ 인 c가 (a,b) 에 존재한다

이 정리의 힘은 정확히 조사하지 않고 무언가의 존재를 증명하는데 잘 쓰인다.
예를들어, "$-2x^5+4x=1$ 이 $(0,1)$에서 근을 가진다" 를 증명해보자.

$f(x)=-2x^5+4x$ 라고 하자.

$f(0)<1$, $f(1)>1$ 이고 f는 연속이므로 "중간값정리"에 의하여, $f(x)=1$ 인 x가 $(0,1)$ 에 존재한다.

2.1. 어떤 크로스컨트리 경주 (cross country) 주자가 30분만에 6마일을 달린다. 그 주자는 정확히 5분동안 1마일을 달린 곳이 있음을 증명하라.
(cross-country : 들을 횡단하는 경주를 말함)

sol.) x를 출발점부터 길을 따라 마일단위로 측정한 거리라고 하자.
각각의 $x\in[0,5]$ 에서, $f(x)$는 (x)에서 $(x+1)$ 지점까지 걸린 시간이라고 하자. 이때 명백히 f는 연속이다.

$f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=30$ (∵ 문제에서)

이 식에서, $f(0), f(1), \cdots, f(5)$는 동시에 5보다 작거나, 동시에 5보다 클 수 없다. 따라서, $f(a)\le 5\le f(b)$ 되는 a, b가 $[0,5]$에 존재한다.

∴ 중간값정리에 의해 $f(c)=5$ 인 $c\in[a,b]$ 가 존재한다.

즉 주자는 c 마일지점부터 $(c+1)$ 마일 지점까지 딱 5분만에 간다.

2.2. f는 연속함수이고 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 이다.

(a) [적분에서 평균값정리 (Mean value theorem for integrals)]

$\int_a^b f(t)\,dt = f(c)\,(b-a)$

인 $c\in[a,b]$ 가 존재한다

(b) $\int_a^c f(t)\,dt=\int_c^b f(t)\,dt$ 인 $c\in[a,b]$ 가 존재한다.

(주의: f는 $[a,b]$에서 적분가능함을 아는 것이 충분하다.)

sol.) (a) M과 m을 $[a,b]$에서 f의 최대값과 최소값이라 하자
(← 최대값 최소값 정리에 의해)

$A=\int_a^b f(t)\,dt$ 라고 하자.

$A(h)=h\,(b-a)$ 라 하자.

$A(m)=m(b-a)\le\int_a^b f(t)\,dt\le M(b-a)=A(M)$

$A(h)$는 연속함수이므로 (h에 관한), 중간값정리에 의해
$A(d) = A$ 즉 $d(b-a) = A$ 인 $d \in [m, M]$ 가 존재한다.
d는 m과 M 사이에 있으므로, 다시 중간값정리에서
$f(c) = d$ 인 $c \in [a, b]$ 가 존재.
따라서 그때 $\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a)$ 이다.

(b) $A = \int_a^b f(t)\,dt$
$A(h) = \int_a^h f(t)dt$ 라고 하자.

$A(h+x) - A(h) = \int_h^{h+x} f(t)dt$
(a)번 풀이에서,
h와 $h+x$ 사이에
$$\int_h^{h+x} f(t)dt = C_x |x|$$
인 C_x가 존재한다.
$\lim_{x \to 0} [A(h+x) - A(h)] = \lim_{x \to 0} C_x |x| = 0$
(주의 : f가 적분가능이므로 C_x는 유계 (bounded))
따라서 $A(h)$는 h에서 연속이다.
$\Rightarrow$ $A(0) = 0$, $A(h) = A$ 이므로
$A(c) = \frac{A}{2}$ 인 c가 0과 h 사이에 존재한다
(중간값 정리에 의해)

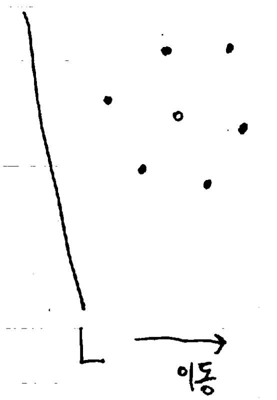
2.3. A를 한 평면상의, 세 점이 같은 직선에 있지 않는 $2n$ 개 점의 집합이다.
그들중 n개는 빨강, n개는 파랑이다.
다음 명제가 틀릴지, 옳을지 밝히고 증명하라.
「 서로 다른 두점을 이은 선분 n개가 서로 교점이 없도록
하는 경우가 존재한다 」 (끝점을 제외한)

sol. 1) n개 붉은 점을 n개의 푸른점에 일대일로 대응시키는 방법은
유한개 ($n!$개) 존재한다. 고로, n개선분 길이합이 최소인 때가 있다.
이경우, 선분간의 교점이 없음을 보이겠다
∵ 만약 $\overline{R_1B_1}$ 과 $\overline{R_2B_2}$ 가 교점이 있다면, (R_1, R_2 : 빨강. B_1, B_2 : 파랑)
우리는 $\overline{R_1B_2}$, $\overline{R_2B_1}$ 으로 교체하여, 총길이를 더 작게 할수 있다.
(삼각부등식에 의함)

2) 수학적 귀납법으로 증명하자.
$n=1$ 인 경우에는 성립한다.
$n=1, 2, \cdots, k$ 인 경우에 성립한다고 가정하자.
A를 어느 세점도 같은 직선상에 있지 않은, 한평면상의

$2(k+1)$ 개 점의 집합이라고 하자. 그 중 $k+1$ 개는 빨강, 나머지 $(k+1)$ 개는 파랑이다.

- A의 볼록포 (convex hull)의 어느 두 점접이 다른 색깔인 경우를 먼저 생각하자. 이때, 연속한 두 점접이 (볼록포상의) 다른색깔인 것이 있다. 이것을 P, Q라고 하자.
  귀납법 가정에 의해서 $A - \{P, Q\}$ 는 우리가 바라는 대로 연결되어 있다. 또한 다른 어떤 선분도, $\overline{PQ}$와 교점이 있을 수 없다 ($\because$ 볼록포라는 조건). 따라서 A에서 위 명제는 성립한다
- A의 볼록포 의 모든 점접이 같은 색인경우를 보자. 그 색을 빨강이라 해도 된다. L을 평면상의 수평선이 아닌 어떤 선이라고 하자. 이때 $B(L)$을 L의 왼쪽에 파란색 점의 수로 정의하고, $R(L)$은 L의 왼쪽의 빨간색 수로 하자. $D(L) = B(L) - R(L)$로 하자.



A의 모든 점이 L의 왼쪽에 있고, 가능한한 모든 선분에 평행하지 않은 수평선 아닌 직선 L을 생각하자. 이때 $D(L) = 0$.
L을 연속적으로 오른쪽으로 움직이면, 한번에 1개씩 A의 점을 만나게 된다. 그때마다 $D(L)$ 값은 1증가 (파란점) 또는 1 감소 (빨간점) 하게 된다.
L이 움직이면서 처음 만나는 점은 붉은색이므로, $D(L)$ 값은 처음에 음수값을 취하게 된다. 마지막 음아닌 $D(L)$ 값은 마찬가지로 양수값이다.
($\because$ A의 볼록포상의 점점은 모두 빨강이다)

따라서 $D(L)$은 처음이나 끝 그 사이에, 0 의 값을 취해야만 한다. ($D(L)$은 정수값 함수라는 것에 주의). L이 그런 때에, L의 왼쪽과 오른쪽 각각에 귀납법의 가정을 적용하면, 이경우에도 주어진 명제가 성립함을 알수 있다.

따라서 $n = k+1$인 A에서도, 명제가 성립한다.

$\therefore$ 수학적 귀납법 (induction) 에 의해, 증명은 완결되었다

Problems

2.4 $f : [0,1] \to [0,1]$ 인 함수 f가 연속이다.
$f(c) = c$ 인 $c \in [0,1]$ 이 존재함을 증명하라.

2.5. 암벽 등산가가 토요일 오전 7시에 산을 오르기 시작해서, 오후 5시에 정상에 도달하였다. 그는 거기서, 야영을 하고, 일요일에 아침 7시에 내려오기 시작해서, 오후 5시에 원래 출발점으로 돌아왔다.

일요일과 토요일의 어느 같은 시각에, 그 사람은 같은 높이에 있을 때가 있음을 보여라.

똑같은 함수

2.6. 어떤 값도 3번 이상 취하지 않는 연속함수는 어떤 값을 딱 한번 가져야만 함을 증명하시오.

2.7. 아래 "삼각 다항식" 이 있다.

$P(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx$

이것의 계수는 모두 실수이고, $|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}| \leq a_n$ 이라 할 때,

$P(x) = 0$ 은 $[0, 2\pi)$ 에서 적어도 $2n$ 개의 근을 가진다는 것을 증명하라.

2.8. 모든 실수 x에 대해, 실수치 연속함수 $f(x)$ 가 $f(f(x)) = kx^9$ 를 만족시키는 것이라고 한다. 이런 f가 존재하기 위한 k의 필요충분조건을 구하시오.

2.9. (a) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 이 연속이고, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ 은 적분가능이다. 또한 $g(x) \geq 0$ 이다 $(x \in [a,b])$

다음식을 만족시키는 $c \in [a,b]$ 가 존재함을 증명하라.

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b f(x)\,dx$$

(b) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 이 증가함수 ($\Rightarrow$ 적분가능) 이고, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ 이 적분가능이고 $g(x) \geq 0$ $x \in [a,b]$ 이다.

다음 식을 만족시키는 $c \in [a,b]$ 가 존재함을 증명하라.

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^c g(x)\,dx + f(b)\int_c^b g(x)\,dx$$

2.10. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 이고 f는 연속이며 $f(0) = f(1)$ 이다.

각각의 자연수 n에 대해 $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$ 인 $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ 이 존재함을 증명하여라.

2.11. 차수가 많아야 3차인 다항식 $P(x)$ 가 시간 t에 어떤 사람의 체온을 나타낸다. 오전 9시부터 3시(오후) 까지의 평균 체온은 $P(x)$에 상관없이 일정한 두 시각의 체온의 평균과 같음을 보여라. 또한, 그 시간이 오전 10시 16분과 오후 1시 44분 에 가까움을 보여라

(힌트! : 적분에서의 평균값 정리 사용. See 2.2 (a))

2.12. 어떤 형태의 삼각형이든지 간에, 넓이를 이등분하는 직선이 있음을 보여라.

2.13. $f:[0,1]\to[0,1)$ 이고 연속인 함수중 $[0,1]$ 의 모든 값을 각각 무한번 취하는 함수의 예를 들어라.

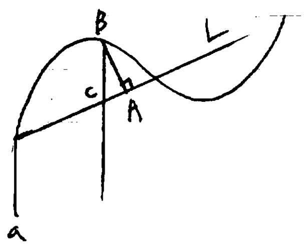
(힌트! : 하나의 방법은 1.8 에 사용된 함수를 수정하는 것이다)

4. 최대값, 최소값의 정리 (The Extreme-Value Theorem)

f가 폐구간 $[a,b]$에서 연속함수이면,
$c, d \in [a,b]$ 가 있어서
$\forall x \in [a,b]$에서 $f(c) \le f(x) \le f(d)$ 가 성립한다

4.1. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 은 미분가능한 함수이다. f'가 중간값정리의 결과를 만족함을 증명하여라.
(i.e. d가 $f'(a)$과 $f'(b)$ 사이 임의의 수일때,
$f'(c)=d$ 인 $c\in(a,b)$ 가 존재한다)

sol.) 만약 f'가 연속이라면 말할 필요도 없다. 그러나 f'는 연속이 아닐수도 있다. (3.5번 참고). 어떻게 증명할까?
일반적인 풀이를 하기전에 추측을 해보자. 그림을 보라.



기울기 d인 직선 L이 $(a, f(a))$를 지난다고 하자.(단 $f'(b) < d < f'(a)$)
$[a,b]$의 각각의 x에 대해 $g(x)$를 $(x, f(x))$로부터 L까지 부호있는 거리라고 하자. (그림에서 AB에 해당). 값이 최대인 곳이 우리가 찾는 점; 즉 미분계수가 d인 점일 것으로 생각된다. 이제 풀이를 해보자. g를 계산을 편하게 하기 위해 BC 길이로 하자.

- $x\in[a,b]$에서, $h(x)$는 $(x,f(x))$에서 L까지 y축에 평행한 선분의 부호있는 길이라고 하자. $g(x)=h(x)\cos\alpha$ ($\because \alpha$는 L에 의한 상수) 이므로 g가 최대인 곳이나 h가 최대인 곳이나 같다. $h(x)$의 이점은 식이 간단하다는 것이다. 직접 구해보면 아래와 같다.

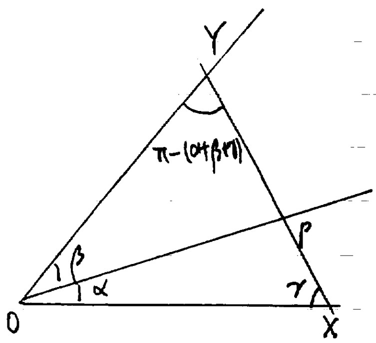
$$h(x)=f(x)-[f(a)+d(x-a)]$$
$$\Rightarrow h'(x)=f'(x)-d$$

처음에 $f'(b)<d<f'(a)$로 가정하였으므로 $h'(b)<0<h'(a)$
이 부등식은 $h(a)$나 $h(b)$ 모두 $[a,b]$에서 h의 최대값이 아니다는 것을 말해준다. (미분계수 정의에 의하여)
고로, h는 연속함수이니, 최대값 최소값 정리에 의해
어떤 $c\in(a,b)$에서 $h(c)$가 최대값이다.
이때 3.7 문제에 의해, $h'(c)=0$ 다시 말해서 $f'(c)=d$.

- 유사한 방법으로 $f'(a)<d<f'(b)$ 인 경우도 하면된다.
이경우는 최소값을 찾는다.

4.2. 반직선 OA, OB가 이루는 각의 내부에 P가 있다. X, Y는 각각 OA, OB 위의 점이고, $\overline{XY}$는 P를 포함할때, $(PX)(PY)$가 최소되게 X, Y를 정하라

sol.) 이 문제는 전형적인 최대 최소문제이다. 이런 문제들은 "최대값이 존재하느냐?" 를 묻지 않고, "언제 최대값이 되느냐?" 를 묻는다. 3.7 의 결과에 의하면, 미분계수가 0 일때라는 조건이 그점이 개구간 의 내부에서 최소값이 되기 위한 필요조건이다. 따라서 우리는 (PX)(PY) 를 한 변수의 식으로 쓸 필요가 있다.



$x=|OX|$ 라 두면, 임의의 양수 x에 대해 OA 상에 X가 유일하게 결정된다. 이때, X, Y, P가 한 직선상에 있도록 OB상에 Y를 결정하자. 이러면 (PX)(PY)가 x에 관해 나올것 같다.

그러나 이때는 그 식이 아주 더럽다.

(PX)(PY)는 와 γ 에 의해 결정된다. (PX)(PY)를 구하기 위해 $\triangle OXP$와 $\triangle OPY$에 사인 법칙을 적용하자.

$$\frac{PX}{\sin\alpha}=\frac{OP}{\sin\gamma}, \quad \frac{PY}{\sin\beta}=\frac{OP}{\sin(\pi-\alpha-\beta-\gamma)}$$

$$\therefore F(\gamma)=(PX)(PY)$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot OP\cdot\frac{OP\cdot\sin\beta}{\sin(\pi-\alpha-\beta-\gamma)}$$

$$=C\cdot\csc\gamma\cdot\csc(\pi-\alpha-\beta-\gamma) \qquad 0<\gamma<\pi$$

(단 $C=\sin\alpha\sin\beta\ OP^2$: 상수)

F는 연속이고, $(0,\pi)$ 에서 미분가능이다.

또한 $F(\gamma)\to\infty$ ($\gamma\to0^+$ 또는 $\gamma\to\pi^-$ 일때)

따라서 F는 최소값을 $(0,\pi)$ 에서 가진다. 그때 $F'(\gamma)=0$

$F'(\gamma)=C\csc\gamma\csc(\pi-\alpha-\beta-\gamma)[\cot\gamma-\cot(\pi-\alpha-\beta-\gamma)]$

$\csc\gamma$ 와 $\csc(\pi-\alpha-\beta-\gamma)$ 는 0 이 아니므로

$F'(\gamma)=0$ 인것은

$$\cot\gamma=\cot(\pi-\alpha-\beta-\gamma)$$

$0<\gamma<\pi$

$0<\pi-\alpha-\beta-\gamma<\pi$ 이므로 $\gamma=\pi-\alpha-\beta-\gamma$

즉 $\triangle OXY$는 이등변 삼각형이다.

최소는 $OX=OY$ 일때 일어난다.

cf.) 원을 이용해서 풀수있다 (기하적인 방법)

OX OY에 접하고 접점이 X, Y가 되는 원이 존재함.

이런 X, Y가 최소임을 증명하면 된다.

Problems

4.3. (a) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 은 연속이고 $[a,b]$의 모든 x에서 $f(x)>0$ 이다. $[a,b]$의 모든 x에 대해 $f(x)\geq c$ 인 양의 상수 c가 존재함을 증명하라.

(b) $f:[0,1]\to(0,1)$ 이 전사함수이고 연속함수인 f가 존재하지 않음을 보여라.

※ 전사함수 (onto-function) : 치역 = 공역

4.4. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 은 $[a,b]$ 각 점에서 미분가능이고 $f'(a)=f'(b)$ 이다.

다음을 만족하는 $c\in(a,b)$가 적어도 1개 존재함을 보이시오,

$$f'(c)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

4.5. (a) (Rolle's theorem) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 은 $[a,b]$에서 연속 (a,b) 에서 미분가능이다.

$f(a)=f(b)$ 이면 $f'(c)=0$ 인 $c\in(a,b)$ 임을 보여라

(b) (평균값 정리 : Mean Value theorem)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 이 $[a,b]$에서 연속 (a,b) 에서 미분가능 이면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 $c\in(a,b)$ 가 존재한다.

4.6. A, B, C가 삼각형의 세 각이면

$$-2\leq\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C\leq\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

임을 보이고, 등호조건을 밝혀라.

4.7. 반지름 r인 원이 주어져 있고, 원상의 P점에서 접하는 직선 L이 있다. 원 위의 임의의 점을 R이라 하자. R에서 L에 수선을 내려 그 수선의 발을 Q라고 하자. $\triangle PQR$ 넓이 최소값을 구하라

6. 평균값 정리 (The Mean-Value Theorem)

f가 $[a,b] \to \mathbb{R}$ 인 함수 이고

$[a,b]$에서 연속, (a,b)에서 미분가능이라 하자.

4.1 에서 ~~쓴~~ 방법과 유사하게

$$F(x) = f(x) - L(x)$$

를 생각한다. 여기서 $y = L(x)$ 는 $(a, f(a))$와 $(b, f(b))$를 잇는 직선이다. 즉 $L(a) = f(a)$, $L(b) = f(b)$

$F(a) = F(b) = 0$

$\therefore$ Rolle 의 정리 (롤의 정리) 에 의해서 $F'(c) = 0$ 인 $c \in (a,b)$가 존재한다. 그때 $f'(c) = L'(c)$

$$\therefore \quad f'(c) = L'(c) = (\,L\text{의 기울기}\,) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Mean-Value Theorem (평균값 정리)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 인 함수 f가 $[a,b]$에서 연속 (a,b)에서 미분가능이면 다음을 만족하는 c가 (a,b)에 존재한다

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

만약 $f(a) = f(b)$ 라면 이식은 롤의 정리와 같다.

6.1. $g(x)$는 x의 모든값에서 $g'(x)$가 연속인 함수이다.

$g(0) = 0$, $|g'(x)| \le |g(x)| \quad \forall x$

가 성립한다고 한다.

$g(x)$를 구하라.

sol.) 우리는 조금 특별한 풀이를 줄려고 한다.

$[0,1]$을 먼저 고려해보자. $x \in (0, \ ]$ 이라고 하자.

평균값 정리에 의해 $c_1 \in (0, x)$ 가 다음을 만족한다

$$g'(c_1) = \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{g(x)}{x}$$

$$\therefore \quad |g(x)| = |x\, g'(c_1)| = |x|\,|g'(c_1)| \le |x|\,|g(c_1)|$$

유사하게, $(0, c_1)$의 c_2에 대하여

$$|g(c_1)| \le |c_1|\,|g(c_2)|$$

$$\therefore \quad |g(x)| \le |x|\,|c_1|\,|g(c_2)|$$

이런식으로 계속 반복해 나가면

우리는 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 이 다음 조건을 만족하는 것을 찾을 수 있다.

$0 < c_n < \cdots < c_2 < c_1 < x < 1$ 이고

$|g(x)| \le |x||c_1||c_2| \cdots |c_{n-1}||g(c_n)|$

g가 연속이므로 유계이다 ($\because$ 최대값 최소값 정리에서 최대 최소가 존재하기 때문). 따라서 마지막 부등식 우변은 얼마든지 작게 할 수 있다. (n을 늘리면 된다) ($\because$ 각각의 $|c_i| < 1$ 이므로)

따라서 $g(x) = 0 \quad x \in [0, 1]$

같은 논의가 $[1, 2]$에서 행해질 수 있다. 마찬가지로

$g(x) = 0 \quad x \in [1, 2]$

귀납법적인 논증으로서, 모든 정수 n에서 $[n, n+1]$에서 $g(x)$가 항등적으로 0 임을 알 수 있다

따라서 $g(x) = 0 \quad {}^\forall x \in \mathbb{R}$

(주의: 우리는 g'가 연속이라는 조건을 이용하지 않았다)

평균값 정리는 아주 유용한 따름정리를 가지고 있다. 그것들은 아래와 같은 것들이다.

f와 g가 $[a, b]$에서 연속이고 (a, b)에서 미분가능일 때

(i) ${}^\forall x \in (a, b)$에서 $f'(x) = 0 \implies f$는 상수

(ii) $f'(x) = g'(x) \quad {}^\forall x \in (a, b) \implies f(x) = g(x) + C$ (C: 상수)

(iii) $\forall x,\ f'(x) > 0 \ (x \in (a, b)) \implies f$는 증가함수 (increasing function)

$\forall x,\ f'(x) < 0 \ (x \in (a, b)) \implies f$는 감소함수 (decreasing function)

i)의 증명 : $x \in (a, b)$ 라 하자.

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) = 0$$

$$\therefore f(x) = f(a)$$

ii)의 증명 : i)에서 $h(x) = f(x) - g(x)$를 적용

iii)의 증명. $x, y \in (a, b)$ 라 하고 $x < y$ 라 가정.

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) > 0$$

$\therefore f(y) > f(x)$: f는 증가함수. (단조증가함수)

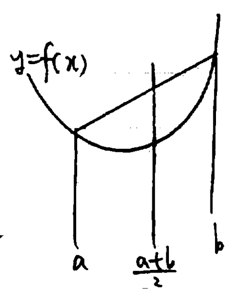
6.2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 이고, $\mathbb{R}$의 임의의 x, y에서 $|f(x) - f(y)| \le (x - y)^2$ 이다. f가 상수임을 증명하여라.

sol.) 평균값 정리의 따름정리를 생각한다면, $\forall x$ 에서 $f'(x)=0$ 임만 보이면 충분하다.

$$
\begin{aligned}
|f'(x)| &= \left|\lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \\
&= \lim_{y\to x} \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \\
&= \lim_{y\to x} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \\
&\le \lim_{y\to x} \frac{(y-x)^2}{|y-x|} \\
&= \lim_{y\to x} |y-x| \\
&= 0
\end{aligned}
$$

6.3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 이고, $\forall x$, $f''(x) \geq 0$ 이다. ...
임의의 a, b 에서

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$$ 임을 증명하시오.



sol.) 그림을 보면, 쉽게 이해가 갈 내용이다. 이것을 증명해보자.
평균값 정리로부터 $x_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ 이고

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)}{\frac{a+b}{2}-a} = f'(x_1)$$

인 x_1 이 존재한다.
마찬가지로 $x_2 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ 이고

$$\frac{f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-\frac{a+b}{2}} = f'(x_2)$$

인 x_2 가 존재한다.

$f''(x) \geq 0$ 이므로, $f'(x)$는 감소하지 않는 함수 (nondecreasing function) 이다.

$$\therefore f'(x_2) \geq f'(x_1)$$

$$\frac{f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a} \geq \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)}{b-a}$$

$$\therefore f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

이제 남은 문제는 주로 존재하는 것에 관한 정리: 중간값, 최대최소, 평균값, 들의 정리를 쓰는 문제들이다.

6.4. f는 [a,b]에서 미분가능한 함수이다. 또한 $c\in(a,b]$가 $f'(c)=0$인 c가 존재한다. 이때 다음을 만족하는 수 $\xi\in(a,b)$가 존재함을 보여라.

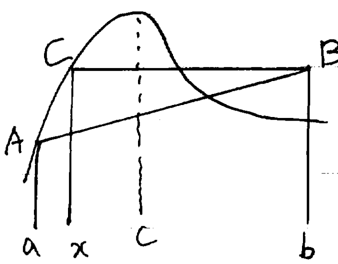
$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$$ 단 f'는 연속함수이다

sol.) <그림으로 추측 ··· 풀이대책>

그림을 보자. B는 CB가 x축에 평행하도록 그어서 만든 것이다.

$\frac{f(x)-f(a)}{b-a}$ 는 AB의 기울기이다.

$f'(x)$는 C에서 접선의 기울기이다.



• $F(x)=f'(x)-\frac{f(x)-f(a)}{b-a}$ 를 생각하자.

이것은 x에 관한 연속함수이다 (여기서 f'가 연속이라는 성질이 사용되었다).

만약 $F(x_2)<0$, $F(x_1)>0$ 인 x_1, x_2만 찾을수 있다면, 중간값 정리에 의해 $F(\xi)=0$ 인 점을 보일수 있을 것이다

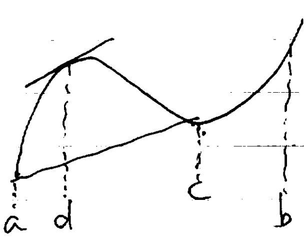
· 그래프에서 보면 $F(a)>0$, $F(c)<0$ 인 것 같다. 그걸 밝히자

• $$F(c)=F'(c)-\frac{1}{b-a}[f(c)-f(a)]$$

$f(c)>f(a)$라 가정하면 $F(c)<0$

※ 평균값정리에서 (a,c)에 $f'(d)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$인 d가 존재한다

$$F(d)=f'(d)-\frac{f(d)-f(a)}{b-a}$$
$$=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}-\frac{f(d)-f(a)}{b-a}$$
$$>\frac{f(c)-f(a)}{b-a}-\frac{f(d)-f(a)}{b-a}$$
$$=\frac{f(c)-f(d)}{b-a}$$



$f(c)-f(d)>0$ 이라면 $F(d)>0$ $F(c)<0$ 이어서 증명끝이지만 아닐수도 있다 (그래프 참조) → 이렇게 풀기 어렵다

• 다음처럼 하자. 구간 $[a,c]$에서 f를 생각하자. 최대최소 정리에서, 최대값이 이 구간에 있고, 그 점을 $x=s$ 라 하자.

이러면 $f(c)>f(a)$ 에서 $a<s\le c$

또한 s는 극점(극대) 이 되므로 $f'(s)=0$
d를 (a,s) 사이의 점이라 하고

$$f'(d)=\frac{f(s)-f(a)}{s-a}$$ 라 하자 (평균값정리)

그러면 $$F(d)=f'(d)-\frac{f(d)-f(a)}{b-a}$$
$$=\frac{f(s)-f(a)}{s-a}-\frac{f(d)-f(a)}{b-a}$$
$$>\frac{f(s)-f(a)}{b-a}-\frac{f(d)-f(a)}{b-a}$$
$$=\frac{f(s)-f(d)}{b-a}>0$$

따라서 $F(d)>0$. $F(c)<0$
$\therefore$ (d,c)에 $F(\xi)=0$ 인 값이 존재한다 (중간값정리)
마찬가지로 $f(c)<f(a)$ 인 경우도, $f(c)=f(a)$ 인 경우도 하면 된다.

6.5. f는 두번 연속 미분가능한 실수치 함수로서, $\forall x$ 에서 $|f(x)|\le 1$ 이다.
또한 $(f(0))^2+(f'(0))^2=4$ 이다.
$f(x_0)+f''(x_0)=0$ 인 실수 x_0 가 존재함을 보이시오.

Sol.) 우리가 고려할수 있는 방법은 2가지 이다
① 중간값 정리 ② 최대 최소정리 . 평균값정리.
① $F(x)=f(x)+f''(x)$
$F(a)>0$ $F(b)<0$ 인 값 찾자 → hard
② $G(x)=(f(x))^2+(f'(x))^2$
$\Rightarrow G'(x)=2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)$
$=2f'(x)[f(x)+f''(x)]$
$G(x)$의 극값이 있다면, $G'(x)=0$. !
이제 우리가 $-2<a<0$, $0<b<2$ 에서
$|G(a)|\le 2$, $|G(b)|\le 2$ 인것을 보이려 한다.
만약 그렇다면 $G(0)=4$ 이므로 $(a,b)\ni x_0$ 에서
$G(x)$가 극대값을 가지게 된다.
평균값 정리로부터 다음과 같은 a, b 가 존재한다.

$-2<a<0$, $\frac{f(0)-f(-2)}{2}=f'(a)$. $\frac{f(2)-f(0)}{2}=f'(b)$
$0<b<2$

$\vdots$

그경우 다음이 성립한다. ← 삼각부등식에 의함.

$$|f'(a)| = \left|\frac{f(0)-f(-2)}{2}\right| \le \frac{|f(0)|+|f(-2)|}{2} \le 1$$

$$|f'(b)| = \left|\frac{f(2)-f(0)}{2}\right| \le \frac{|f(2)|+|f(0)|}{2} \le 1$$

따라서

$$|G(a)| = |(f(a))^2+(f'(a))^2| \le |f(a)|^2+|f'(a)|^2 \le 2$$

$$|G(b)| = |(f(b))^2+(f'(b))^2| \le |f(b)|^2+|f'(b)|^2 \le 2$$

존재이유 : 연속 → x_0를 $G(x)$ 의 (a,b) 에서 극대값이라 하자. $G'(x_0)=0$

$G(0)=4$ 이므로 $G(x_0) \ge 4$. $\cdots *$

$G'(x_0) = 2f'(x_0)\,[\,f(x_0) + f''(x_0)\,] = 0$

만약 $f'(x_0)=0$ 이라면

$G(x_0) = (f(x_0))^2 \le 1$ 이니 $*$ 에 어긋남.

$\therefore f'(x_0) \ne 0$

$\therefore f(x_0) + f''(x_0) = 0$ → 증명끝.

6.6. $f(0)=0$, $f(1)=1$ 인 함수 f를 생각한다. 그것이 $[0,1]$ 에서 미분가능이라 하자. 임의 자연수 n 에 대하여,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f'(x_i)} = n$$

인 서로다른 $[0,1]$ 의 수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 이 존재함을 보이시오.

관찰) $n=1$ 인 경우를 생각하자.

$\frac{1}{f'(x_i)} = 1$ 인 $x_i \in [0,1]$ 을 찾아야 한다.

그런데 이것은 평균값 정리에 의해 명백하다.

$n=2$ 인 경우도 생각해 보자.

$[0,1]$을 $[0,x]$ 와 $[x,1]$로 나누면 각각에서 평균값정리가 성립한다.

$x_1 \in (0,x)$ 이고, $x_2 \in (x, 1)$ 일때

$$f'(x_1) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}, \quad f'(x_2) = \frac{f(1)-f(x)}{1-x}$$

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{f(x)} + \frac{1-x}{1-f(x)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x(1-f(x)) + (1-x)f(x) = 2f(x)(1-f(x))$$
$$\Leftrightarrow \quad x - xf(x) + f(x) - xf(x) = 2f(x) - 2(f(x))^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x - 2xf(x) + f(x) - 2(f(x))^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x - f(x))(1 - 2f(x)) = 0$$

우리가 $f(x) = \frac{1}{2}$ 인 것을 선택한다면 이것은 성립되고 증명은 종결된다. ↳ 중간값의 정리

일반적인 n 에서도 유사한 방법으로 하리라고 추측할 수 있다.

구간을 $\frac{i}{n}$ 인 곳에서 잘라 각각에서 평균값 정리를 써 보자.

풀이) C_i 는 다음 성질을 만족하는 것 중 최소인 것으로 하자.

Note.
우리는 여기서 연속성을 사용했다.

$$C_i \in [0, 1]$$
$$f(C_i) = \frac{i}{n} \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots, n-1)$$

그러면 $0 < C_1 < C_2 < \cdots < C_{n-1} < 1$

또한 $C_0 = 0$, $C_n = 1$ 로 한다.

$i = 1, 2, 3, \cdots, n$ 에 대하여

$$x_i \in (C_{n-1}, C_n) \quad , \quad f'(x_i) = \frac{f(C_i) - f(C_{i-1})}{C_i - C_{i-1}}$$

로 한다. ($\because$ 평균값 정리)

$$f'(x_i) = \frac{\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}}{C_i - C_{i-1}} = \frac{1}{n(C_i - C_{i-1})}$$

따라서 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f'(x_i)} = n \sum_{i=1}^{n} (C_i - C_{i-1}) = n$

Problems

6.7. (a) $$F(x) = \frac{\sin x + \sin(x+a)}{\cos x - \cos(x+a)}$$

$F(x)$ 가 상수함수임을 $F'(x) = 0$ 으로서 증명하라.

(b) $P(x)$는 x 의 3차다항식이고 , $y^2 = P(x)$ 이다.

$$\frac{1}{y^2} \frac{d}{dx}\left(y^3 \frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

은 상수임을 보여라. (주어진 식을 P 에 관해 표시해 보렴.)

6.8. (a) $y = f(x)$ 가 미분방정식 $y'' + y = 0$ 의 해일때 $f^2 + (f')^2$ 은 상수임을 증명하세요.

(b) (a)를 이용하여 $y'' + y = 0$ 의 해는 오직 $y = A\cos x + B\sin x$ 꼴 뿐임을 증명하여라.

(힌트: $f(x)=A\cos x+B\sin x$ 가 $y''+y=0$ 을 만족시킨다는 것은 보이기 쉽다. 이때 $A=f(0)$, $B=f'(0)$ 임을 알수 있다. $f(x)$ 를 해라고 하자.

$$F(x)=f(x)-f(0)\cos x-f'(0)\sin x$$

라고 하자. (a)를 활용하여 $F(0)=0=F'(0)$ 을 이용하라)

(c) (b)를 이용해서 다음 공식을 증명하여라.

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

6.9. f는 $[0,1]$에서 미분가능한 함수이고 $f(0)=0$, $f(1)=1$ 이다. 임의의 자연수 n에 대하여

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}k_i$$

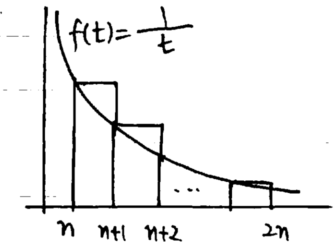
인 서로다른 n개의 수 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 이 존재함을 증명하여라.

8. 적분 (Integral)

다음 식이 $n \to \infty$ 일때 어떻게 되는지 알아보자.

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1} \quad \cdots\cdots *$$

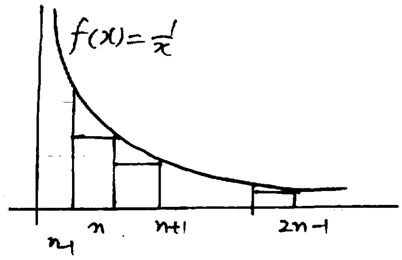
이것을 생각하는 한 방법은 그림을 생각하는 것이다.



그림처럼 보면 위식의 값은 직사각형 면적의 합이다.

$$\therefore \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1} > \int_n^{2n}\frac{1}{x}\,dx = \log x\Big]_n^{2n}$$

$$= \log 2n - \log n = \log 2$$



이와 비슷하게 오른쪽 그림에서

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$$

$$< \int_{n-1}^{2n-1}\frac{1}{x}\,dx = \log x\Big]_{n-1}^{2n-1}$$

$$= \log\frac{2n-1}{n-1} = \log\left(2+\frac{1}{n-1}\right)$$

따라서 $\log 2 < \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1} < \log\left(2+\frac{1}{n-1}\right)$

$\therefore$ $n \to \infty$ 이면 $*$는 $\log 2$로 수렴한다.

다른 생각법은 다음 처럼 식을 보는 것이다.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{n}$$

Σ의 각항 $\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{n}$ 는 밑변이 $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ 이고 높이가 $\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ 인 직사각형의 면적이다. $n \to \infty$ 일때, 이것은 $y=\frac{1}{1+x}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$ 에 둘러싸인 도형의 면적이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \log 2$$

8.1. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{2n}{k}\right]-2\left[\frac{n}{k}\right]\right) = ?$$

$[x]$: x 이하의 최대 정수를 의미한다.

sol.) 문제는 우리에게

$$\int_0^1 \left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right) dx$$

를 구하라고 하고 있다. 따라서, $f(x)=\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]$ 의 그래프를 생각하며 x축사이의 면적을 고려하자.

$f(x)$ 의 $(0,1)$ 에서 불연속점은 $\frac{2}{x}$ 나 $\frac{1}{x}$ 이 정수일 때 이므로, $x=\frac{2}{n}$ 또는 $x=\frac{1}{n}$ 일때이다.

간단히 다음도 알 수 있다.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\in\left(\frac{2}{2n+1},\ \frac{2}{2n}\right] \\ 1 & x\in\left(\frac{2}{2n+2},\ \frac{2}{2n+1}\right] \end{cases}$$

즉면적은 $\int_0^1 \left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right) dx$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{2k+1}-\frac{2}{2k+2}\right)\times 1$$

$$=2\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots\right)$$

$-1<x<1$

$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$

$\int_0^x \frac{1}{1+x}dx=\int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k\, dx$

$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k+1}x^{k+1}$

$\log(1+x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k+1}x^{k+1}\quad(|x|<1)$

교대급수성질에서 위식 우변은 $x=1$ 일때 수렴.

Abel 의 극한정리에서

$\lim_{x\to 1^-}\log(1+x)=\lim_{x\to 1^-}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k+1}x^{k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k+1}$

$\log 2$

그런데

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\qquad -1<x\le 1$$

이므로,

$$\int_0^1 \left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right) dx$$

$$=2\left(\log(1+1)-1+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\log 4-1$$

8.2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\prod_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{\frac{1}{n}}$$

sol.) 곱을 합으로 바꾸자

$$\frac{1}{n^4}\prod_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{\frac{1}{n}}$$

$$=\exp\left[\log\frac{1}{n^4}\prod_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{\frac{1}{n}}\right]$$

$$=\exp\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\log(n^2+i^2)-4\log n\right]$$

여기서

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\log(n^2+i^2)-4\log n\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\left(\log(n^2+i^2)-2\log n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\log\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)$$

$$= \int_0^2 \log(1+x^2)\,dx$$

$$= \left[x \log(1+x^2)\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx$$

$$= 2\log 5 - 2\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= 2\log 5 - 2\left[x - \tan^{-1}x\right]_0^2$$

$$= 2\log 5 - 2\left(2 - \tan^{-1}2\right)$$

$$= 2\log 5 - 4 + 2\tan^{-1}2$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \prod_{i=1}^{2n} (n^2+i^2)^{\frac{1}{n}}$$

$$= e^{(2\log 5 - 4 + 2\tan^{-1}2)}$$

$$= 25\, e^{2\tan^{-1}2 - 4}$$

8.3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k+m+1} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{k+n+1}$ 임을 증명하라.

sol.) 문제를 푸는 핵심은

$$\frac{1}{k+m+1} = \int_0^1 t^{k+m}\,dt$$

인 것에 있다.

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k+m+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \int_0^1 t^{k+m}\,dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} t^{k+m}\,dt$$

$$= \int_0^1 t^m (1-t)^n\,dt$$

치환 적분법 → $s = 1-t$ $\quad dt = -ds \quad t = 1-s$

$$= \int_0^1 s^n (1-s)^m\,ds$$

$$= \int_0^1 s^n \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} s^k\,ds$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \int_0^1 s^{k+n}\,ds$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{k+n+1}$$

Problems

8.4. 다음을 계산하여라.

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdots+\frac{1}{3n}\right)$

(b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^a+2^a+\cdots+n^a}{n^{1+a}}\right)$ $a>-1$

(c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1^2+n^2}+\frac{n}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

(d) $\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$

8.5. 다음을 계산하여라.

(a) $\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{3}{2}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$

(b) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k^2+n^2}}$

8.6. $\sum_{n=1}^{10^6} n^{-\frac{3}{2}}$ 의 정수부를 (integral part) 계산하여라.

8.7. f는 $[0,a]$에서 연속인 함수이다. k는 상수이고
$f(x)=f(a-x)$, $g(x)+g(a-x)=k$ 이다. ($\forall x\in[a,b]$ 에 대하여)
$\int_0^a f(x)g(x)\,dx=\frac{1}{2}k\int_0^a f(x)\,dx$ 임을 증명하라.
다음을 계산한 것을 이용해라.

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

8.8. (a) $A=\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{(x+2)^2}\,dx$ 라 두자.
$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{x+1}\,dx$ 를 A로 나타내시오.

(b) $f(x)=\int_1^x\frac{\log t}{1+t}\,dt$ $(x>0)$ 이라 하자.
$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$ 값을 계산하여라.

8.9. $\int_0^1 f(x)\,dx=1$, $\int_0^1 xf(x)\,dx=a$, $\int_0^1 x^2f(x)\,dx=a^2$ (a는 주어진 실수)
임을 만족하는 모든 연속함수 ($0\le x\le 1$ 에서) $f(x)$를 찾아라.

8.10. $f(x,y)$ 는 $[0,1]^2 = S$ 의 내부의 임의의점 (a,b) 에서 연속인 함수이다. $S_{(a,b)}$ 는 각 변이 S에 평행하고 중심이 (a,b) 인 정사각형중 S의 부분집합이고 최대인 것을 말한다.

만약 $\iint_{S_{(a,b)}} f(x,y)\,dx\,dy$ 가 0 이라면

$f(x,y)$ 는 S에서 항등적으로 0인 함수인가?

10. 함수를 통한 부등식문제.

이 장에서는 해석적 기술 특히 미분이 얼마나 부등식 풀이에 효과적으로 쓰일 수 있는 가를 보겠다.

10.1. p, q, r은 양수. $2p = q + r$, $q \neq r$

$$\frac{p^{q+r}}{q^q r^r} < 1$$ 임을 증명하라.

sol.) q, r 이 양의 정수라고 가정한다면

q개의 $\frac{1}{q}$과 r개의 r에서 산술 기하평균 부등식을 쓰면

$$\left(\frac{1}{q^q}\frac{1}{r^r}\right)^{\frac{1}{q+r}} < \frac{q\times\frac{1}{q} + r\times\frac{1}{r}}{q+r} = \frac{1}{p}$$

이것은 우리가 바라는 부등식이다. 그러나 q, r 이 정수가 아니면?

Jensen(젠센) 부등식이나 가중치 산술 기하평균 부등식 (weighted arithmetic-mean-geometric-mean inequality)을 적용하면 훨씬 쉽다.

다음과 같은 manner 로 부등식을 변형해보자.

$$p^{q+r} < q^q r^r$$

$$\left(\frac{q+r}{2}\right)^{q+r} < q^q r^r$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{q+r} < \left(\frac{q}{q+r}\right)^q \left(\frac{r}{q+r}\right)^r$$

$$\frac{1}{2} < \left(\frac{q}{q+r}\right)^{\frac{q}{q+r}} \left(\frac{r}{q+r}\right)^{\frac{r}{q+r}}$$

$x = \frac{q}{q+r}$, $y = \frac{r}{q+r}$ 라 두자. $x + y = 1$ 이다. 또한 $0 < x, y < 1$.

따라서 위 문제는 다음과 동치이다.

$$F(x) \equiv x^x (1-x)^{1-x} > \frac{1}{2} \qquad 0 < x < 1,\ x \neq \frac{1}{2}$$

이렇게 해서, 우리는 해석적 방법을 쓸 수 있다.

$(0,1)$에서 F의 최소값을 찾아보자. 미분을 간단히 하기 위해 $G(x) = \log F(x)$ 라 두자.

G를 미분하면:

$$G'(x) = \frac{d}{dx}\left(x\log x + (1-x)\log(1-x)\right)$$

$$= \log x + 1 - 1 - \log(1-x)$$

$$= \log\frac{x}{1-x}$$

<관찰> $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1)$ 에서 $G'(x) < 0$, $G'(x) > 0$

$x = \frac{1}{2}$ 에서 $G'(x) = 0$ 이므로

$G(x)$는 $x=\frac{1}{2}$ 에서 최소값을 가진다.

따라서 F의 최소값은 $x=\frac{1}{2}$ 에서 발생한다

즉 $F(x) \geq F(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

따라서 $x \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ 이면

$F(x) > \frac{1}{2}$ → 증명끝

10.2. p, q : 양수. $p+q=1$ 일때

$$pe^{\frac{x}{p}} + qe^{-\frac{x}{q}} \leq e^{\frac{x^2}{8p^2q^2}}$$ 임을 보여라.

sol.)

$$F(x) = \frac{pe^{\frac{x}{p}} + qe^{-\frac{x}{q}}}{e^{\frac{x^2}{8p^2q^2}}}$$ 인 함수를 생각한다.

문제는 $\forall x$, $F(x) \leq 1$ 임을 보이는 것이다. 대칭성에 의해

$x \geq 0$ 에서만 증명해도 된다.

그런데, $F(0) = 1$ 이므로

"$F(x)$가 $x \geq 0$ 에서 감소함수" 임을, 즉

$x \geq 0$ 에서 $F'(x) \leq 0$ 임을 보이면 된다.

$F(x) > 0$: 계산을 편하게 하기 위하여 $G(x) = \log F(x)$ 라 두자

$$G'(x) = \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{e^{\frac{x}{p}} - e^{-\frac{x}{q}}}{pe^{+\frac{x}{p}} + qe^{-\frac{x}{p}}} - \frac{x}{4p^2q^2}$$

$$= \frac{e^{\frac{x}{pq}} - 1}{pe^{\frac{x}{pq}} + q} - \frac{x}{4p^2q^2}$$

$x \geq 0$에서 $F(x) > 0$ 이므로

$$G'(x) \leq 0 \iff F'(x) \leq 0$$

불행히도, $G'(x)$의 꼴은 쉽게 보일수 있는 것이 아니다.

$G'(0) = 0$ 임을 알수 있으니

"$G'(x)$가 $x \geq 0$ 에서 감소함수" 임을 보이자.

계산생략 :

$$G''(x) = \frac{-(pe^{\frac{x}{pq}} - q)^2}{4p^2q^2(pe^{\frac{x}{pq}} + q)^2}$$

$\therefore G''(x) \leq 0 \implies G'(x) \leq 0 \quad (x \geq 0)$

즉 $F'(x) \leq 0 \quad (x \geq 0)$

$\therefore F(x) \leq 1 \quad (x \geq 0) \iff F(x) \leq 1 \quad \forall x$

앞의 문제에 사용된 방법은 매우 평상적인 방법이다. 다시한번 보자.

$f(x) \geq g(x)$, $x \geq a$ 를 증명하기 위하여

$Q(x) \equiv \frac{f(x)}{g(x)} \geq 1$, $x \geq a$ 또는

$$D(x) \equiv f(x) - g(x) \geq 0 \ , \ x \geq a$$

를 보이면 되고, 그것은 $x=a$ 일때 값과, $Q'(x) \geq 0$ (or $D'(x) \geq 0$)
임을 보이면 된다.

10.2 문제에서

$$D(x) = e^{\frac{x^2}{8p^2q^2}} - pe^{\frac{x}{p}} - qe^{-\frac{x}{q}}$$

를 사용한다면, 풀기 어려워진다. 왜냐하면 $D'(x) \geq 0$ 을 만족하지 않기 때문이다.

10.3. 임의의 실수 a, b 에서

$$|a+b|^p \leq |a|^p + |b|^p \qquad 0 \leq p \leq 1$$

임을 증명하시오.

sol.) 몇몇 경우는 매우 쉽다. 예를 들면 $a=0$ 이라든지, a, b가 반대부호이든지 하면 명백하다. 또, $p=0$ 이거나 $p=1$ (삼각부등식) 일때도 명백하다.

따라서 우리는 $a, b > 0$ 이고 $0<p<1$ 인 곳에서만 증명하자.

이때, $x = \frac{b}{a}$ 라 하자. 문제의 부등식은 다음과 동치이다 (제한 조건을 단 경우)

$$(1+x)^p \leq 1 + x^p \qquad x>0, \qquad 0<p<1$$

$D(x) = (1+x)^p - 1 - x^p$ 라 두자

$D(0) = 0$

$D'(x) = p(1+x)^{p-1} - px^{p-1} < 0$

따라서 증명되었다!

10.4. 함수 f는 $[0, 1]$에서 연속인 도함수를 가진다. 또한 $0 < f'(t) \leq 1$ 이다.
$f(0)=0$ 으로 한다.

$$\left[\int_0^1 f(t)dt \right]^2 \geq \int_0^1 [f(t)]^3 \, dt$$ 를 증명하시오.

sol.) $0 \leq x \leq 1$ 에서

바로 풀기 어려우니까
더 "강한" 명제를 증명한다

$$F(x) = \left[\int_0^x f(t)\,dt \right]^2 - \int_0^x (f(t))^3 \, dt$$ 라 하자.

그러면 $F(0)=0$

$$F'(x) = 2\left[\int_0^x f(t)dt\right] f(x) - [f(x)]^3$$

$$= f(x)\left[\ 2\int_0^x f(t)dt - (f(x))^2\ \right]$$

그런데 $f(0)=0$ 이고 $f'(x) > 0$ 이므로, $f(x) \geq 0$

따라서 $2\int_0^x f(t)dt - (f(x))^2$ 이 음수가 아니라는 것을 보이어야 한다.

$G(x) = 2\int_0^x f(t)dt - [f(x)]^2 \qquad 0 \le x \le 1$ 라 두자.

그러면 $G(0)=0$

$$G'(x) = 2f(x) - 2f(x)f'(x)$$
$$= 2f(x)(1-f'(x)) \geq 0$$

따라서 $G(x) \geq 0$

$\therefore \quad F'(x) \geq 0$

$F(x) \geq 0$

따라서 $F(1) \geq 0$

$$\left[\int_0^1 f(t)dt\right]^2 \geq \int_0^1 (f(t))^3 dt$$

10.5 . x가 양수이면 , $\log(1+\frac{1}{x}) > \frac{1}{x+1}$ 임을 보이시오.

sol.) $f(x) = \log(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x}$ 라 두자

$$= \log(1+x) - \log x - \frac{1}{1+x}$$

그러면 $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(1+x)^2}$

$$= \frac{x(x+1)-(1+x)^2+x}{x(1+x)^2}$$

$$= \frac{-1}{x(1+x)^2} < 0 \qquad (x>0)$$

또한 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

따라서 $f(x) > 0 \qquad (x>0)$

10.6. 다음을 만족하는 모든 자연수 n을 찾으시오

$$3^n + 4^n + \cdots + (n+2)^n = (n+3)^n$$

sol.) 직접 계산 해보면 $n=2, 3$ 일때는 성립한다. $n=4$나 5일때는 홀수짝수 논의로서 성립할 수 없음을 보일수 있다. 아마도 당신은 modulo 산술을 이용해서 시도하려 할 것이다. 그러나 이것도 그리 효과적인 방법이 아니다. 여기서는 다른 방식으로 접근하겠다.

$n \geq 6$ 일때 $3^n + 4^n + 5^n + \cdots + (n+2)^n < (n+3)^n$ 임을 증명하자.

다음 형태로 변형할 수 있을 것이다.

$$\left(\frac{3}{n+3}\right)^n + \left(\frac{4}{n+3}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n < 1$$

$$\left(1-\frac{n}{n+3}\right)^n+\left(1-\frac{n-1}{n+3}\right)^n+\cdots+\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n<1$$

항의 순서를 편리하도록 바꾸면

$$\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n+\left(1-\frac{2}{n+3}\right)^n+\cdots+\left(1-\frac{n}{n+3}\right)^n<1$$

만약 우리가 $\left(1-\frac{k}{n+3}\right)^n<\left(\frac{1}{2}\right)^k \quad k=1,2,\cdots,n$

임을 증명할수있다면 아래와 같이 증명된 것이다.

$$\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n+\left(1-\frac{2}{n+3}\right)^n+\cdots+\left(1-\frac{n}{n+3}\right)^n<\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n<1$$

자 이제 $\left(1-\frac{k}{n+3}\right)^n<\left(\frac{1}{2}\right)^k$ 을 증명하자.

베르누이의 (Bernoulli's inequality : 10.10 참조)

$$\left(1-\frac{k}{n+3}\right)^n\le\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^{nk}=\left[\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n\right]^k$$

마지막 단계는 $\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n\le\frac{1}{2}\quad(n\ge 6)$ 임을 보여야 한다.

함수 $F(x)=\left(1-\frac{1}{x+3}\right)^x$ 를 생각하자.

$F(6)<\frac{1}{2}$ 이고, $x\ge 6$ 에서 $F'(x)<0$ 이므로 $F(x)<\frac{1}{2}$

따라서 증명은 완결되었다.

10.7. $0\le a<b<\frac{\pi}{2}$ 에서 $\frac{b-a}{\cos^2 a}<\tan b-\tan a<\frac{b-a}{\cos^2 b}$ 임을 보여라.

sol.) $f(x)=\tan x$ 를 $[a,b]$ 에서 생각하자. 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

$$\therefore \tan b-\tan a=(b-a)\sec^2 c \qquad c\in(a,b)$$

$\sec^2 a<\sec^2 c<\sec^2 b$ 이므로 성립한다.

많은 부등식들이 볼록(convex)이나 오목(concave)성질을 이용할 수 있다.
이런 생각은 6.3 에 나온다.

$f:R\to R$ 이고 $f''(x)\ge 0$ 이면

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}$$ 이다.

$f''(x)\le 0$ $\quad f\left(\frac{x+y}{2}\right)\ge\frac{f(x)+f(y)}{2}$

예를 들면 임의의 실수 a와 b에서

코시슈바르츠 부등식으로도 증명할 수 있다.

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2} \quad (\because f(x)=x^2 \text{은 볼록함수})$$

Convex

또 다른 예는 $0 < x, y < \pi$ 일때

$$\sin\frac{x+y}{2} \geq \frac{\sin x + \sin y}{2} \quad (\because f(x)=\sin x \text{는 오목함수})$$

(단 $(0,\pi)$에서)

10.8. $a+b=1$ 인 두 양수 a, b 에 대하여

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$ 임을 증명하시오.

sol.) $\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ 을 알고 있다.

$x = a+\frac{1}{a}$, $y = b+\frac{1}{b}$ 로 두면

$$\frac{1}{2}\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\right] \geq \left\{\frac{1}{2}\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)\right]\right\}^2$$

$$= \left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right\}^2$$

코시부등식을 사용해도 된다. :

산술-조화평균부등식 사용 $\geq \left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{a+b}\right)\right\}^2 = \frac{25}{4}$

10.9. $i=1,2,\cdots,n$ 에서 $0 < x_i < \pi$.

$$x = \frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

다음을 증명하라 $$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\sin x_i}{x_i}\right) \le \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$$

sol.) 다음을 풀어도 된다.

$$\sum_{i=1}^{n} \log\frac{\sin x_i}{x_i} \le n \log\frac{\sin x}{x}$$

함수 $f(t) = \log\frac{\sin t}{t}$ 를 생각하라.

계산해보면 $f''(t) < 0$ 이니 f는 오목 (concave) 함수이다

따라서 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

과정 생각 →
* 연구과제
(cf. 이것은 "Jensen부등식")

여기서 $$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

임을 ... 이끌어낸다.

이식에 적용해보면

$$\log\frac{\sin x}{x} \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{\sin x_i}{x_i}$$ → 증명끝

Problems

10.10. (Bernoulli's inequallity) $0<a<1$ 일때, $x \geq -1$ 이면

$(1+x)^a \le 1+ax$ 임을 증명하라.

만약 $a<0$ 또는 $a>1$ 인 때는 어떻게 될까?

10.11. $x>0$ 일때

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < \frac{x(x+2)}{2(x+1)}$$ 를 증명하시오.

10.12. (Huygen's inequallity) $0<x<\frac{\pi}{2}$ 일때
$2\sin x + \tan x \geqslant 3x$ 임을 증명하시오.

10.13. $\forall x>0$, $(2+\cos x)x > 3\sin x$

(a) 이 부등식을 $F(x) = x - \frac{3\sin x}{2+\cos x}$ 를 이용하여 풀어보라.

(b) 이 부등식을
$F(x) = (2+\cos x)x - 3\sin x$ 를 이용하여 풀어라.

10.14. $x>0$, $x\neq 1$ 일때 $0 \leq \frac{x\log x}{x^2-1} \leq \frac{1}{2}$ 을 증명하라.

10.15. $x>-2$ 일때
$\log\left(1-\frac{1}{x+3}\right) + \frac{x}{(x+2)(x+3)} < 0$ 을 증명하라.

10.16. $a, b>0$ $a\neq b$ 일때 다음을 증명하시오.
$$\left(\frac{a+1}{b+1}\right)^{b+1} > \left(\frac{a}{b}\right)^b$$

10.17. $0<b<a<\frac{\pi}{2}$ 일때
$\frac{\sin a}{\sin b} < \frac{a}{b} < \frac{\tan a}{\tan b}$ 임을 증명하여라.

10.18. 이 과에서 배운 방법을 이용하여 자연수 n에 대해 다음을 증명하라.
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$
($f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 가 증가함수 라는 것을 보여라)

10.19. a, b, c가 양수이다.
$f(x)=\sqrt{x}$ 의 오목성을 이용하여 $a\cos^2\theta + b\sin^2\theta < c$
이면 $\sqrt{a}\cos^2\theta + \sqrt{b}\sin^2\theta < \sqrt{c}$ 임을 증명하라.

10.20. $i=1,2,\cdots,n$ 에서 $x_i>0$ 으로 한다. $f(t)=\log t$ 라 두고
10.9 와 유사한 방법으로 다음을 증명하고, 등호조건 $\Leftrightarrow$ x_i가 모두 같을 때 임을 보여라.
$$(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

10.21. (a) $i=1,2,\cdots,n$ 에서 $x_i>0$

10.20의 결과를 이용하여 다음을 증명하여라.

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \le (x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

(b) a, b, c : 양수, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ 이다

$(a-1)(b-1)(c-1) \ge 8$ 임을 증명하시오.

10.22. a, b, c 는 양수이고 $a+b+c=1$ 이다.

$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \ge \frac{100}{3}$ 을 증명하시오.

10.23. a, b, c 는 삼각형 세 변의 길이이다.

$\frac{3}{2} \le \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \le 2$ 를 증명하시오.