입체기하

1. 직선과 평면

정의 ① 두 직선 l_1과 l_2가 "평행"하다

$\Longleftrightarrow$ i) l_1과 l_2가 한 평면상에 있다
ii) l_1과 l_2의 교점이 없다.

기호: $l_1 // l_2$

② 두 평면 π_1과 π_2가 평행하다

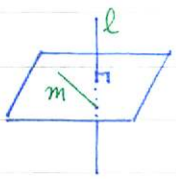
$\Longleftrightarrow$ π_1과 π_2의 교점이 없다.

평면의 식: $ax+by+cz=d$ $(a^2+b^2+c^2 \neq 0)$

③ 두 직선 l_1과 l_2의 사잇각

$\equiv$ 공간 내의 임의의 점 P_0를 지나고 l_1과 l_2에 평행한 두 직선의 P_0에서의 사잇각

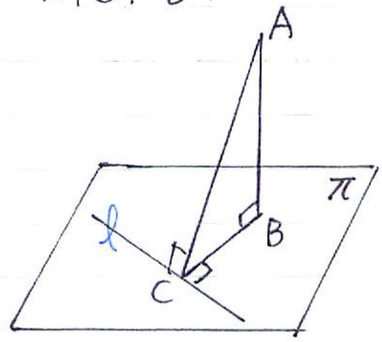
④ l_1과 l_2의 사잇각이 $90°$일 때 $l_1 \perp l_2$.



⑤ 평면 π와 직선 l이 수직이다

$\Longleftrightarrow$ π 속의 임의의 직선 m에 대해 $m \perp l$

삼수선의 정리

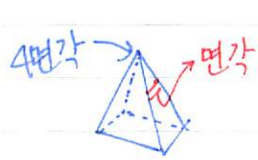


① $AB \perp l$, $BC \perp l$ $\Longrightarrow$ $AC \perp l$

② $AB \perp l$, $AC \perp l$ $\Longrightarrow$ $BC \perp l$

③ $AC \perp l$, $BC \perp l$, $BC \perp AB$ $\Longrightarrow$ $AB \perp l$

2. (볼록) 다면체

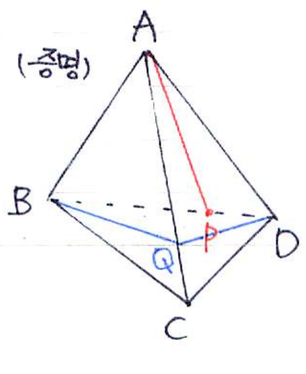


다면체의 경계는 꼭지점, 모서리, 면으로 이루어져 있다. 이때 각 면은 볼록 다각형이다. 한 꼭지점에서 n개의 면이 만날 때 이 꼭지점을 n면각 이라 한다

면각이란 이 면의 두 경계인 두 모서리가 이루는 각이다.

정리 2.1. 삼면각에서 두 면각의 합은 나머지 면각의 크기보다 크다.

(증명)



$\angle BAD$를 가장 큰 면각이라 할 때

$\angle BAD < \angle BAC + \angle CAD$ 를 보이면 된다

$\angle BAC = \angle BAP$ 되게 P를 $\overline{BD}$상에 잡는다

$\overline{AP} = \overline{AQ}$ 되게 Q를 $\overline{AC}$상에 잡는다

$\therefore \triangle ABP \equiv \triangle ABQ$

$\angle CAD > \angle PAD$ 임을 보이면 된다

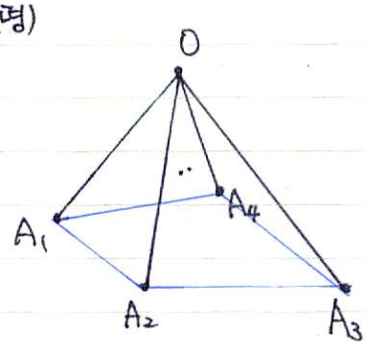
$\Leftarrow$ $PD < QD$ 임을 보이면 된다

$BQ + QD > BD = BP + PD$

$\therefore QD > PD$ (Q.E.D)

정리 2.2 . 볼록 다면각의 모든 면각의 합은 2π 보다 작다

(증명)



$A_1, \cdots, A_n$을 O와 연결된 꼭지점이라 하자

$A_0 = A_n$, $A_{n+1} = A_1$ 이라 하자

$$\sum_{i=1}^{n} \angle A_i O A_{i+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \pi - (\angle OA_iA_{i+1} + \angle OA_{i+1}A_i) \right\}$$

$$= n\pi - \sum_{i=1}^{n} (\angle OA_iA_{i+1} + \angle OA_{i+1}A_i)$$

(정리 2.1) $\rightarrow$ $$< n\pi - \sum_{i=1}^{n} A_{i-1}A_iA_{i+1}$$

$$\le n\pi - (n-2)\pi$$ (n각형 내각 합)

$$= 2\pi$$ (Q.E.D)

㊟ 오일러 (Euler) 의 공식

$v - e + f = 2$

㊟ 정다면체 (정 4. 6. 8. 12. 20 면체)

"표" 참조

㊟ 정사면체의 표면적 $\sqrt{3}\,a^2$

부피 $\frac{\sqrt{2}}{12} a^3$ a: 한 모서리의 길이

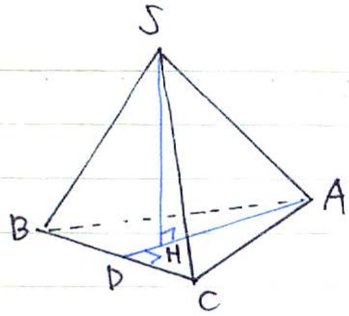
예제 1. 삼각뿔 SABC의 꼭지점 S에서 밑면 ABC에 내린 수선의 발을 H, A에서 BC에 내린 수선의 발을 D라 할때, H가 AD상에 놓일 필요충분조건은 $SA \perp BC$ 인 것임을 보여라.

(증명) ($\Rightarrow$) "H가 AD 상에 있다 하자.

$BC \perp AD$. $BC \perp SH$

$\Longrightarrow$ BC는 AD와 SH를 포함하는 평면에 수직

$\therefore BC \perp SA$ //



($\Leftarrow$) $SA \perp BC$라 하자.

$BC \perp AD$ 이므로 BC는 SDA가 이루는 평면에 수직이다.

$\therefore$ H가 AD상에 있다

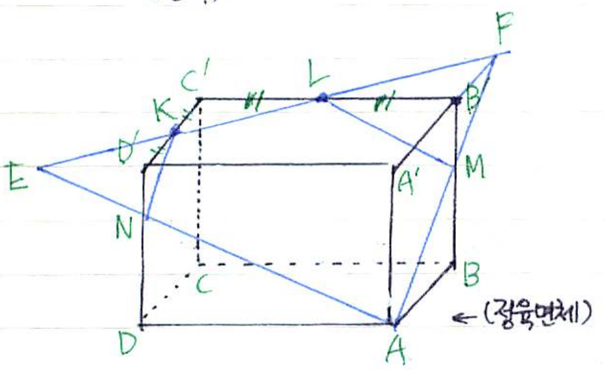
($\because$ H'을 점 S에서 AD에 내린 수선의 발이라 하면 $SH' \perp AD$, $SH' \perp BC$ 이므로 $SH' \perp$ (면ABC) $\therefore$ H는 H'와 같다)

예제2. 어떤 삼각뿔의 꼭지점에서 밑면에 내린 수선의 발이 밑면의 수심과 일치하면 밑면의 한 꼭지점에서 옆면에 내린 수선의 발도 같은 성질을 가짐을 보여라.

(풀이) 예제 1에 의해 성립한다.

예제3. 한 모서리의 길이가 1인 정육면체 $ABCDA'B'C'D'$에서 AA', BB', CC', DD'이 각각 옆 모서리일 때, 꼭지점 A와 $B'C'$의 중점, $C'D'$의 중점을 지나는 면에 의해 절단된 면의 넓이를 구하라.

(풀이)



$\triangle KLC' \equiv \triangle FLB'$

$KL = LF = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $B'F = \frac{1}{2}$ $B'M = \frac{1}{3}$

단면적 $= \triangle FEA - 2\triangle FLM = 7\triangle FLM$

($\because$ $\triangle FEA = 9\triangle FLM$)

$FL = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$FM = \sqrt{B'F^2 + B'M^2} = \frac{\sqrt{13}}{6}$

$LM = \sqrt{LB'^2 + B'M^2} = \frac{\sqrt{13}}{6}$

Heron의 공식에 의하여

$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ 에서 $s = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{13}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{13}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{4}$

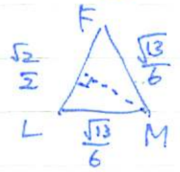
면적 $= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{13}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{13}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)}$

$= \sqrt{\left(\frac{13}{36} - \frac{2}{16}\right)} \times \frac{\sqrt{2}}{4}$

$= \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\frac{26-9}{72}}$

$= \frac{\sqrt{17}}{24}$

또는

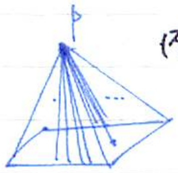


밑변: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

높이 $\sqrt{\frac{13}{36} - \frac{2}{16}}$

$= \frac{\sqrt{17}}{6\sqrt{2}}$

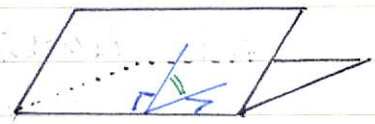
$\therefore$ 넓이 $\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{17}}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{17}}{24}$



(정의) · 볼록다각뿔이란 한 볼록 다각형 밖의 한점 P에서 이 볼록다각형의 모든점을 잇는 선분의 집합이다. 이때 P를 꼭지점이라한다. (보통 P를 볼록다각형이 놓인 평면 밖에서 잡는다)

* 정삼각뿔은 밑면이 정삼각형이고 옆모서리의 길이가 모두 같은 삼각뿔이다. 정삼각뿔의 꼭지점에서 밑면에 내린 수선의 발은 밑면의 중심이고 옆면은 모두 이등변 삼각형이다. 마찬가지로 정다각뿔을 정의한다.

* 볼록 다면체에서 이면각이란 인접한 두면 사이의 각이다



3. 구면기하학

(정의) 구 상의 "대원"(great circle) 이란 구 상의 원으로서, 중심이 구의 중심과 일치한다.

* 대원은 구의 중심을 통과하는 평면과 구의 교집합이다.
* 서로 마주보지 않는 두 점을 잇는 대원은 단 한개 존재한다.
* 구면상의 대원은 평면기하학에서의 직선에 해당된다.
* 서로 다른 두 대원은 두 점에서 교차한다.
* 한 대원의 극이란 구면 상의 점으로서 이 점과 마주보는 점을 잇는 지름이 대원을 이루는 평면에 수직인 점이다.
* 대원은 구면을 둘로 나눈다. 이때 각각을 반구라한다 (hemisphere)

– 구면삼각형이란 세 반구의 공통부분이다. 볼록 구면 n각형이란 n개의 반구의 공통부분이다.

정리 3.1. 구면 삼각형에서

$$\text{내각의 합} - \text{넓이} = \pi$$

볼록 구면 n각형에서

$$\text{내각의 합} - \text{넓이} = (n-2)\pi$$

: 각각의 각은 π보다 작다

따름정리 3.2 구면삼각형에서 내각의 합은 π보다 크고 3π보다 작다

* 구면삼각형의 세 변의 길이를 a, b, c라 하자.

$|b-c| < a < b+c \iff$ 삼면각에서 두 면각의 합은 나머지 면각보다 크다.

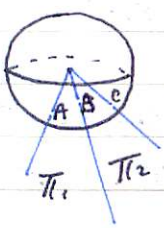
$\Updownarrow$

구면삼각형에서 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크다.

정리 3.3. 반지름이 a인 구면상의 볼록구면 다각형의 각변의 길이의 합은 $2\pi a$ 미만이다.
($\iff$ n면각에서 모든 면각에서의 그 크기의 합은 2π 미만이다)

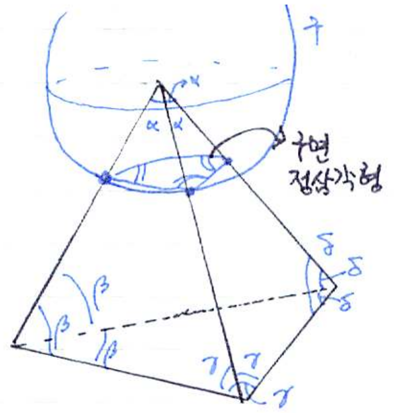
* 세 양수 a, b, c가 한 구면삼각형의 세 변의 길이일 필요충분조건은

$$|b-c| < a < b+c, \quad a+b+c < 2\pi$$



두 평면 π_1과 π_2 사이의 이면각은 구면삼각형 ABC에서 $\angle ABC$와 일치한다

예제) 한 사면체의 이면각이 모두 같으면, 이 사면체는 정사면체 임을 보여라



$3(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=4\pi$

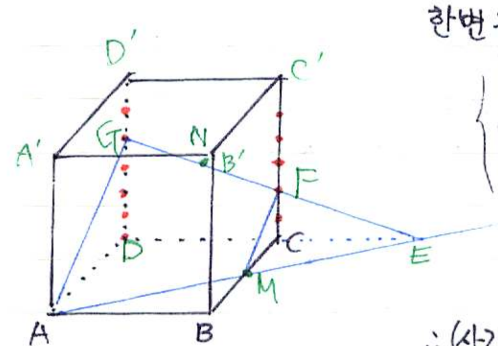
$\pi=\alpha+\beta+\gamma=\alpha+\beta+\delta=\alpha+\gamma+\delta \quad \beta+\gamma+\delta$

$\alpha=\beta=\gamma=\delta=\frac{\pi}{3}$

각면이 정삼각형이므로 정사면체

예제4. 정육면체 ABCDA'B'C'D' 에서 꼭지점 A와 BC의 중점, 면 DCC'D'의 중점을 지나는 평면은 정육면체의 부피를 어떠한 비로 나누는가?

(풀이)



한변 길이를 1로 봐도 문제가 없다

$\begin{cases} \overline{CE}=1 \\ \overline{CF}=\frac{1}{3} \\ CM=\frac{1}{2} \end{cases}$

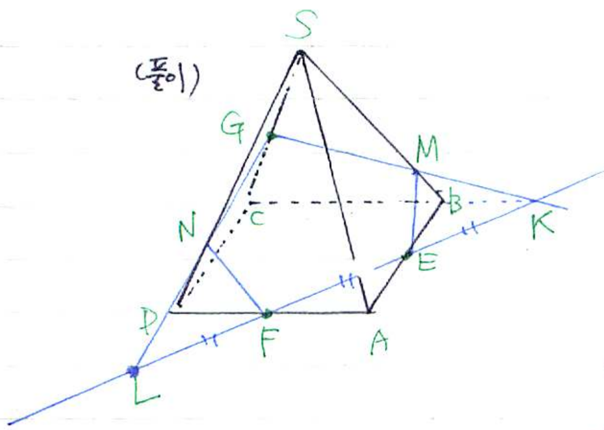
∴ 삼각뿔 EFCM 의 부피 : $\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)\times 1$
$=\frac{1}{36}$

∴ (삼각대 CFMDGA의 부피)
= (삼각뿔 EGA) − (삼각뿔 EFM)
= 7×(삼각뿔 EFM)
$=\frac{7}{36}$

답 ; 29 : 7

예제5. 꼭지점이 S인 정사각뿔 SABCD에서 모서리 AB, AD, CS의 각 중점들을 지나는 평면은 뿔의 부피를 어떤 비로 나누는가?

(풀이)

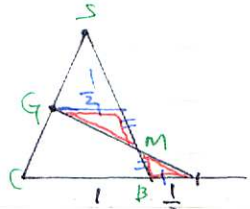


밑면의 각변의 길이를 1이라 하자.

LF = FE = EK

$BK=\frac{1}{2}$

△SBC를 살펴보자



$BM=\frac{1}{4}BS$

$\triangle BEK=\frac{1}{8}$

사각뿔 SABCD의 높이를 h라 하자

삼각뿔 KMBE $= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{h}{4} = \frac{h}{96}$

삼각뿔 KGCL $= \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{h}{2} = \frac{3}{16}h$

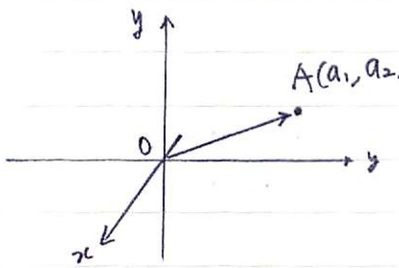
∴ (CEMGNF의 부피) $= \frac{3}{16}h - \frac{h}{96}\times 2 = \frac{h}{6}$

전체부피 : $\frac{h}{3}$ 이므로

∴잘린 비율 : 1:1

○공간벡터

$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$



$\vec{OA} = \vec{a}$

내적 : $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

정리 : $\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$

((증명)) cosine 제 2법칙

$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$

$(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + \cdots$ 식으로 계산하여 확인한다.

* $\vec{a}\cdot\vec{a} = \|\vec{a}\|^2$

$\vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

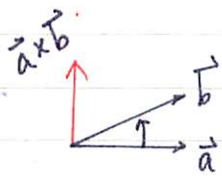
$\vec{i}=(1,0,0)$ $\vec{j}=(0,1,0)$ $\vec{k}=(0,0,1)$

$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

((정의)) 외적

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

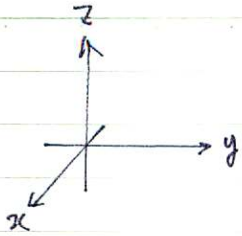
(성질) ① $\vec{a}\perp(\vec{a}\times\vec{b})$. $\vec{b}\perp(\vec{a}\times\vec{b})$



$\vec{a}\times\vec{b}$

: $\vec{a}$에서 $\vec{b}$로 회전할 때 오른 나사가 나아가는 방향

② $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$



③ $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$. $\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i}$. $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$

④ $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin\theta$ = $\vec{a}$와 $\vec{b}$로 이루어진 평행사변형의 넓이

$\|\vec{a} \times b\| = 0 \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$

※ 응용문제

세점 $A=(0,0,1)$, $B=(2,-1,1)$, $C=(-1,0,2)$를 꼭지점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하라.

풀이) $\overrightarrow{AB} = (2,-1,0)$
$\overrightarrow{AC} = (-1,0,1)$

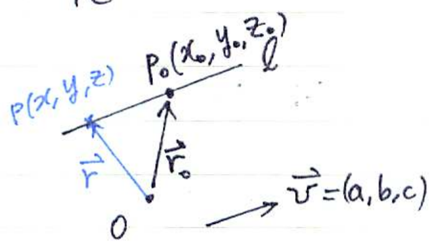
∴ 넓이는 $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$

$$= \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\|$$

$$= \frac{1}{2}\|(-1,-2,-1)\|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

◦ 직선



l의 식을 다음과 같이 구한다

$\overrightarrow{P_0P} = \vec{r} - \vec{r_0} = t\vec{v}$

① ∴ $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$: 벡터식

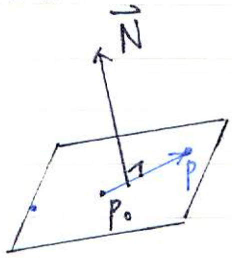
$(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + t(a,b,c)$

② $\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$: 매개식

③ $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ if $abc \neq 0$ "대칭식"

· 평면

평면의 식은 평면상의 한점과 평면에 수직인 벡터 (normal vector)로 결정된다.



$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ $\vec{N} = (a,b,c)$

$P = (x,y,z)$

※ $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{N} = 0$

$(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \cdot (a,b,c) = 0$

$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0.$

$ax+by+cz=d$ $d = ax_0+by_0+cz_0$

- x절편 a, y절편 b, z절편 c 인 평면의 식

$$: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

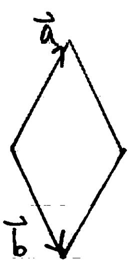
예제. 세점 A=(0,1,0), B(2,1,1), C=(0,2,1)을 지나는 평면의 식을 구하라.

(풀이)
$$\vec{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$
$$= (2,0,1) \times (0,1,1)$$
$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (-1,-2,2)$$

평면식은
$$-x-2y+2z=-2$$

예제. 마름모의 두 대각선이 직교함을 증명하라

(풀이)



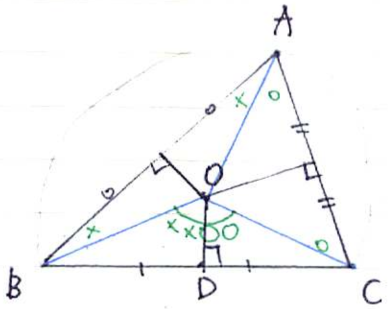
$\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$ 가 두 대각선이 된다

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$$
$$= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$= \|\vec{a}\|^2-\|\vec{b}\|^2$$
$$= 0 \qquad (\because \|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|)$$

연습문제1) 정삼각뿔의 한 옆모서리의 길이가 b이고 각 옆모서리에서 이면각이 $\varnothing$라 하자. 이때 밑면의 한변의 길이를 구하라.

연습문제2) 정육면체 ABCDA'B'C'D'에서 꼭지점 A, 면 A'B'C'D'의 중심 R, 면 B'C'CB의 중심 S를 지나는 평면이 변 B_1C_1을 점 E에서 자를 때 $\overline{B_1E} : \overline{C_1E}$를 구하라

· 1. 삼각형의 외접원



$OA=OB=OC$

O : 외심

① $\angle BOD = \angle COD = \angle BAC$
($\because \angle BOC = 2\angle BOD$
$= 2\angle BAC$)

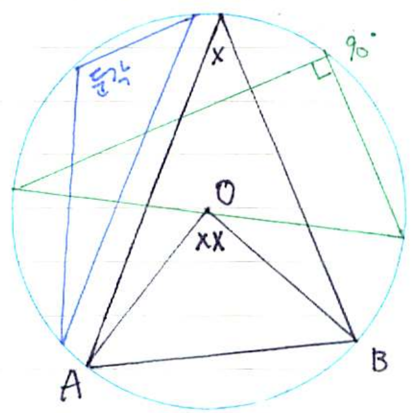
② $\therefore BD = R\sin\angle BOD = R\sin A$ 이므로

$a = 2R\sin A$

마찬가지로 하면

sine 법칙 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

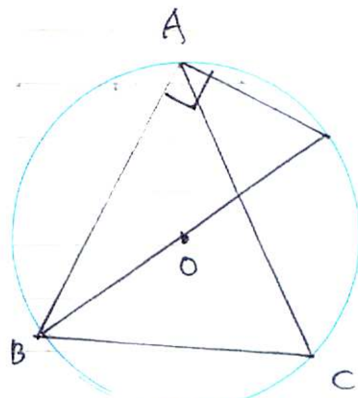
· 2. 원의 원주각과 중심각



3. sine 법칙

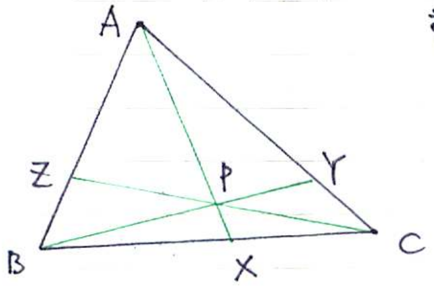
임의의 삼각형에서

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



4. Ceva (체바)의 정리

AX 같은것
: cevian



한점에서 3개의 cevian이 만나면

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB} = 1$$

증명) $\dfrac{BX}{XC} = \dfrac{(ABX)}{(AXC)} = \dfrac{(PBX)}{(PCX)} = \dfrac{(ABX)-(PBX)}{(AXC)-(PCX)} = \dfrac{(BAP)}{(CAP)}$

$\dfrac{CY}{YA} = \dfrac{(BCY)}{(BAY)} = \dfrac{(PCY)}{(PAY)} = \dfrac{(BCY)-(PCY)}{(BAY)-(PAY)} = \dfrac{(BAP)}{(BCP)}$

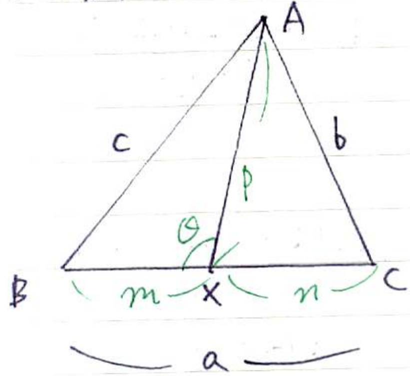
$\dfrac{AZ}{ZB} = \dfrac{(CPA)}{(CPB)}$

$\therefore \dfrac{BX}{XC}\dfrac{CY}{YA}\dfrac{AZ}{ZB} = 1$

ΔABC의 넓이
ΔABC
(ΔABC)
(ABC)

· 역도 성립 ·

5. 스튜와트정리



$$a(p^2+mn)=b^2m+c^2n$$

(증명)

$$p^2+m^2-2pm\cos\theta=c^2$$

$$p^2+n^2+2pn\cos\theta=b^2 \qquad \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$$

$$(m+n)p^2+(m+n)mn=b^2m+c^2n$$

$$\therefore\ a(p^2+mn)=b^2m+c^2n$$ //

특히 $m=n=\frac{a}{2}$ 인 경우

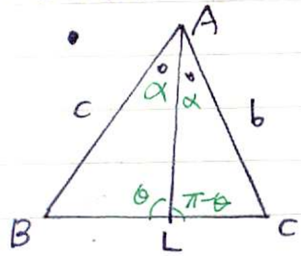
$$a(p^2+\frac{a^2}{4})=\frac{a}{2}(b^2+c^2)$$

$$p^2+(\frac{a}{2})^2=\frac{b^2+c^2}{2}$$

$$p^2+m^2=\frac{b^2+c^2}{2}$$: 파푸스의 정리.

6. 삼각형의 오심

•



BL : CL = AB : AC

(증명)

$$\frac{AB}{\sin\theta}=\frac{BL}{\sin\alpha}$$

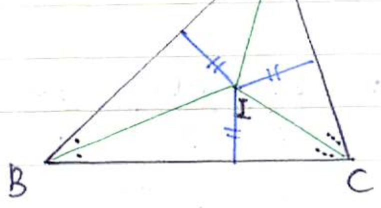
$$\frac{AC}{\sin\theta}=\frac{LC}{\sin\alpha}$$

두 식을 나누면

AB : AC = BL : LC //

식을 정리하면 $BL=\frac{ac}{b+c}$ $\quad LC=\frac{ab}{b+c}$

• 내심



r을 내접원의 반지름이라 하면

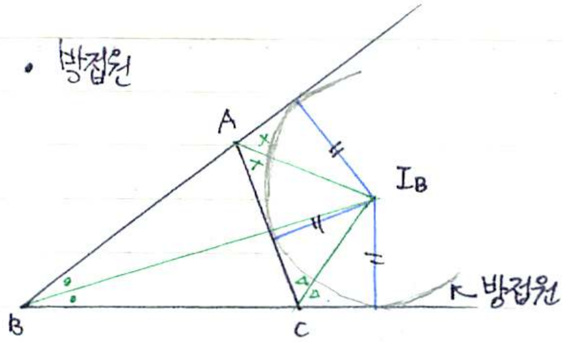
$$(\triangle ABC)=\frac{a+b+c}{2}r$$

$p=\frac{a+b+c}{2}$ 라 두면 $(\triangle ABC)=pr$

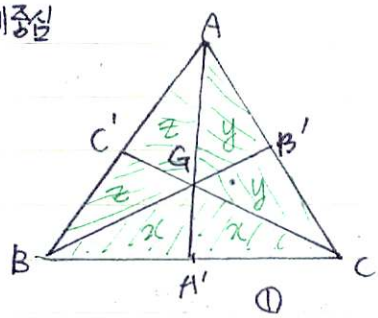
Heron의 공식과 연립하면

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

- 방접원



- 무게중심



G : 무게중심

①

$(BAG) = (CAG)$

$2y = 2z \qquad y = z$

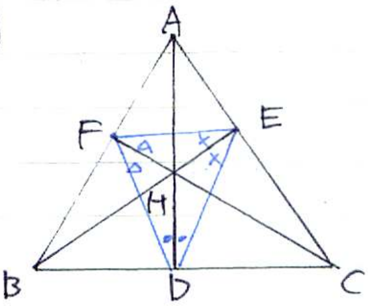
$\therefore\ x = y = z$

즉 무게중심과 중선은 삼각형을 6개의 같은 넓이의 삼각형으로 나눈다

② ①에 의해

$AG : A'G = 2 : 1$

- 수심



H : 수심

(증명) "한점에서 세수선이 만남"

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}$$

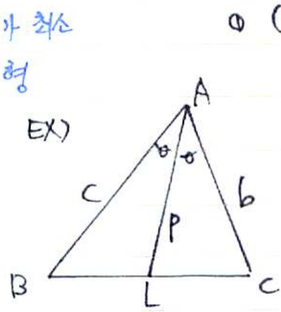
$$= \frac{BD\sin B}{CA\sin C}\ \frac{BC\sin C}{BA\sin A}\ \frac{CA\sin A}{CB\sin B} = 1 \quad \text{이므로}$$

체바의 정리에의해 한점에서 만남

AB, AC, CB의 한 점을 택해 만든 삼각형중 둘레가 최소 : 수심삼각형

① (정의) $\triangle DEF$: 수심삼각형

EX)



$AL^2 = ?$

(풀이)

$$(ABL) + (ACL) = (ABC)$$

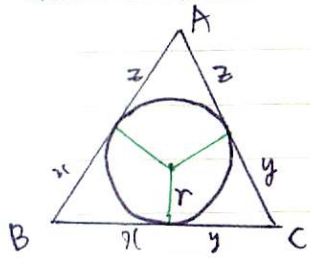
$$\frac{1}{2}bp\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}cp\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}bc\sin A = bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$(b+c)^2p^2 = 4b^2c^2\ \frac{1+\cos A}{2} = 2b^2c^2\left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$= bc\left\{(b+c)^2 - a^2\right\}$$

$$\therefore\ p^2 = bc\left\{1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right\}$$

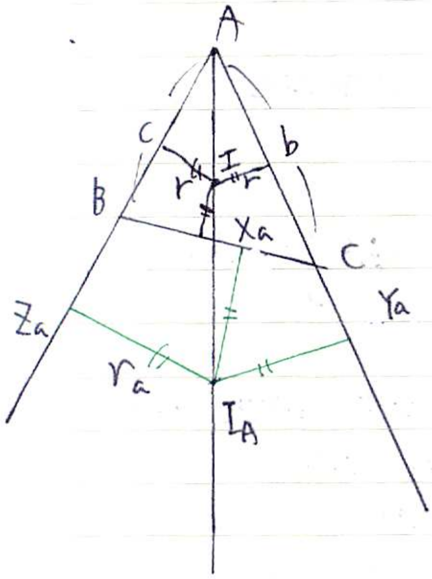
6. 내접원과 외접원



$$\left.\begin{aligned} x+y&=a \\ y+z&=b \\ z+x&=c \\ 2(x+y+z)&=a+b+c, \end{aligned}\right) \quad \therefore \quad \begin{aligned} x&=s-b \\ y&=s-c \\ z&=s-a \end{aligned}$$

단 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$

$$\left\{\begin{aligned} \tan\frac{A}{2}&=\frac{r}{s-a} \\ \tan\frac{B}{2}&=\frac{r}{s-b} \\ \tan\frac{C}{2}&=\frac{r}{s-c} \end{aligned}\right.$$



$AZ_a = AY_a$

$c + BZ_a = b + CY_a$

또 $BZ_a + CY_a = a$

$BZ_a + (c-b) + BZ_a = a$

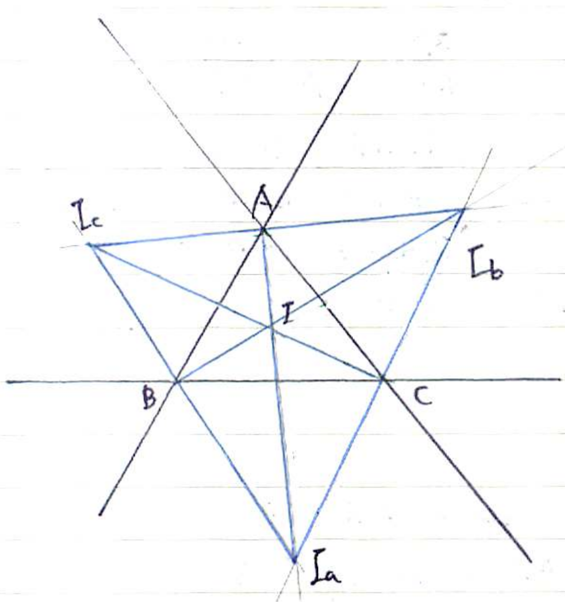
$\therefore BZ_a = \dfrac{a+b-c}{2} = s-c$

$AZ_a = s$

$\dfrac{r_a}{r} = \dfrac{s}{s-a} \qquad r_a = \dfrac{rs}{s-a}$

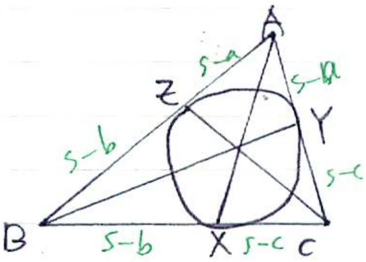
(각 A에 대한 방심: I_A
각 A에 대한 방접원 반경: r_a) 마찬가지로 $r_b = \dfrac{rs}{s-b} \qquad r_c = \dfrac{rs}{s-c}$

※ $\dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{3s-2s}{rs} = \dfrac{1}{r}$



△ABC의 방심들을 이은 삼각형
△$I_aI_bI_c$ 의 수심삼각형이
△ABC 이다

Gergonne
(게르곤느의 정리)

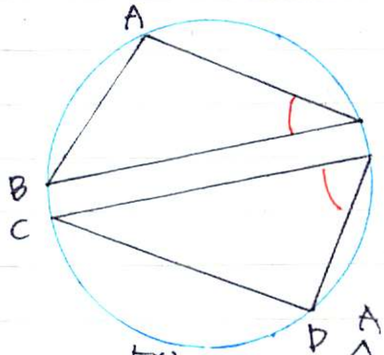


AX, BY, CZ가 한점에서 만남

(증명) $\frac{s-c}{s-b}\,\frac{s-a}{s-c}\,\frac{s-b}{s-a}=1$

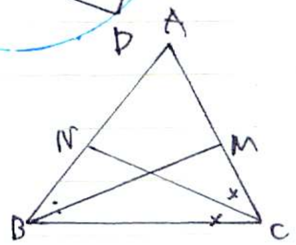
by Ceva 정리 → 한점에서 만남

7. Steiner - Lehmn 의 정리



한 원에서
AB, CD를 두현이라할 때
AB<CD 이면
AB위의 예각인 원주각은
CD위의 예각인 원주각과 같다.

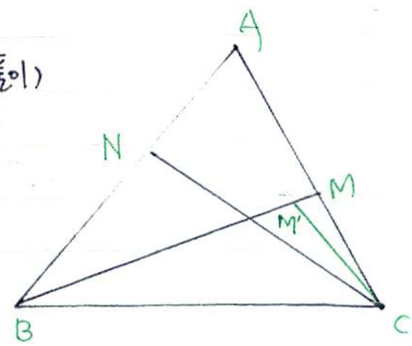
EX)



$\angle B < \angle C$
$\Rightarrow$ $BM > NC$
임을 증명하라

이것이 증명된 후
$\overline{BM}=\overline{CN}$
$\Longleftrightarrow$ 이등변삼각형
($\overline{AB}=\overline{AC}$)

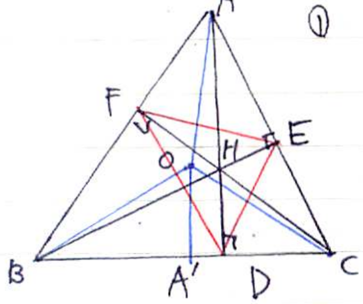
(풀이)



$\angle NBM = \angle NCM'$ 되게
M'를 잡으면 (BM상에)
$\angle NBM' = \angle NCM'$이므로
□BCM'N은 원에 내접

EX)

8. 수심삼각형



① $\angle A'OC = \angle A'OB = \angle A$

$\therefore \angle OBC = 90 - \angle A$

또한 $\angle ABE = 90 - \angle A$
$\angle ACF = 90 - \angle A$ } ①

① 에서 □BFEC는 원에 내접한다.

마찬가지로 □CEHD, □DHFB도 원에 내접한다.

($\angle D = \angle E = 90 = \angle F$ 이므로)

$\therefore \angle HDF = \angle HBF = 90 - \angle A$ (원 BDHF에서 원주각)

$\angle HDE = \angle HCE = 90 - \angle A$ (원 HDCE에서 원주각)

즉 $\angle HDF = \angle HDE$

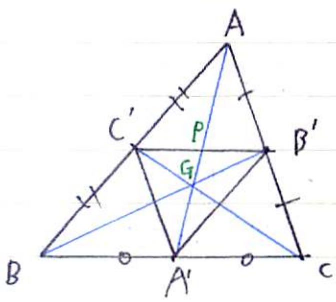
예각삼각형의 수심은 수심삼각형의 내심이다

마찬가지로 하면 다음을 얻는다

$$\begin{cases} \angle HDF = \angle HDE \\ \angle HED = \angle HEF \\ \angle HFE = \angle HFD \end{cases}$$

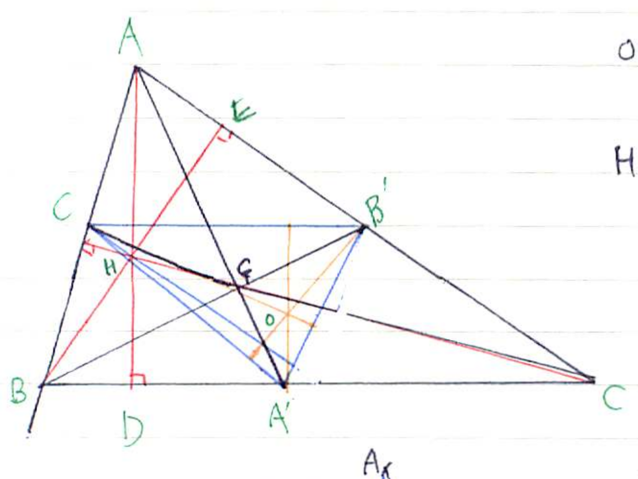
② $\angle HAO = |\angle B - \angle C|$

9. 중점삼각형과 오일러 직선



- $\triangle A'B'C'$: $\triangle ABC$의 중점삼각형 (medial triangle)
- $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ 변의 비 1:2
- $\triangle ABC$의 무게중심 = $\triangle A'B'C'$ 의 무게중심

$\therefore AG : A'G = 2:1 = A'G : GP$



O: $\triangle ABC$의 외심

$\triangle A'B'C'$의 수심
H: $\triangle ABC$의 수심 { $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$
$AH = 2OA'$
$AG = 2A'G$

$AD \parallel A'O$ 이므로

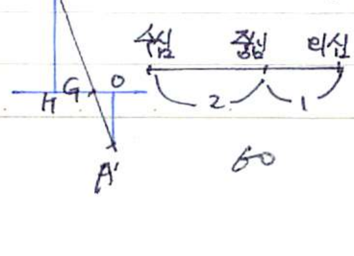
$\angle HAG = \angle OA'G$

$\therefore \triangle AGH \sim \triangle A'GO$

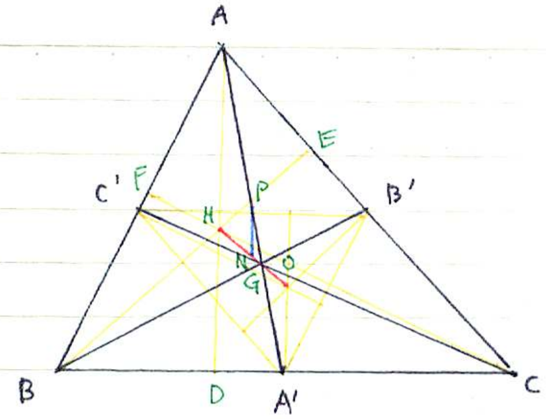
$\therefore \angle AGH = \angle A'GO$

$\therefore$ H, G, O 는 동일 직선상에 있다.

그림은 뒷페이지 참조



$\therefore$ HGO를 Euler 직선이라 한다



※ 둔각삼각형에서도 같이 성립

$B'C'$의 중점 P

$AP = A'P$

$PN \parallel AH \parallel OA'$

∴ N은 OH의 중점

PN은 $B'C'$의 수직이등분선

∴ N은 $\triangle A'B'C$ 의 외심

∴ 중점사각형의 외심은 Euler 직선의 HO 의 중점이다

$A'N = B'N = C'N = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}BO = \frac{1}{2}CO = \frac{1}{2}R$

$ND = NA' = NE = NF$

∴ N을 중심으로 D, E, F를 지나는 원 : 구점원

EX) △ABC의 외접원 반지름: R

1) $\overline{OH}^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2)$

2) $DA' = \dfrac{|b^2-c^2|}{2a}$

3) Euler 직선이 BC에 평행 $\Longleftrightarrow$ $\tan B \tan C = 3$

sol.) 1) $OA'^2 = OC^2 - A'C^2 = R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ - - - - ①

$GA' : AG = 1 : 2$ $\quad GA' = n,\ AG = 2n \quad AA' = 3n$

$(3n)^2 = AA'^2 = \frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)$: 중선정리 적용한 식 (pappus정리)

△OAA'에 스튜와트정리를 적용하면

$AA' \cdot (OG^2 + OA \cdot OA') = GA \cdot A'O + GA' \cdot OA$

$3n\,(OG^2 + 2n^2) = 2n\,OA'^2 + n\,OA^2$

$= n\left[2R^2 - \frac{1}{2}a^2 + R^2\right]$ by ①

$OH^2 = (3OG)^2 = 9R^2 - \frac{3}{2}a^2 - 18n^2$

$= 9R^2 - (a^2+b^2+c^2)$

3) $AD = b\sin C$

$OA' = R\cos\angle A'OC = R\cos A = R\cos(180 - (B+C))$

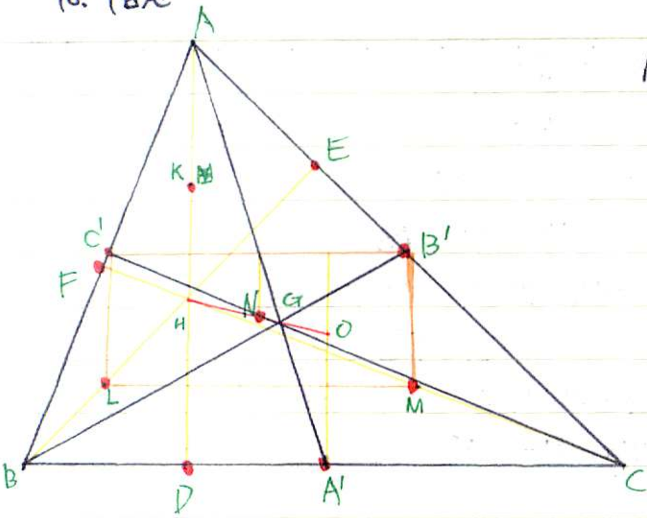
$= -R\cos(B+C) = +R(\sin B\sin C - \cos B\cos C)$

$OA' = \frac{1}{3}A'C'\sin C' = \frac{1}{3}b\sin C = \frac{1}{3}2R\sin B\sin C$

$\therefore \frac{1}{3}\sin B\sin C = \cos B\cos C$

$\therefore \tan B\tan C = 3$

10. 구점원



A', B', C' : BC, AC, AB의 중점

L, K, M : HB, HA, HC의 중점

$LM \parallel BC \quad LM = \frac{1}{2}BC$

$\therefore LM \mathrel{\underline{\parallel}} B'C'$

($\because B'C' \parallel BC \quad B'C' = \frac{1}{2}BC$)

∴ □B'C'LM은 평행사변형

또한 $C'L \parallel AH$, $C'L = \frac{1}{2}AH = AK$. . . . .

마찬가지로 생각하면

$A'L \mathrel{\underline{\parallel}} B'K$.

$KC' \mathrel{\underline{\parallel}} A'M$

평행사변형 □KLA'B', □KC'A'M이 생긴다

평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분한다.

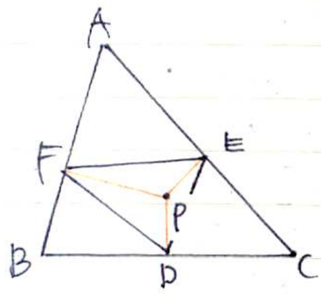
$NC' = NM = NL = ND = NA' = NE = NK = NB' = NF$

세개의 수선의 발

세 변의 중점

수심에서 세 꼭지점에 이르는 선분의 중점을 지나는 원을 구점원

11. 수족삼각형 (Pedal triangle)

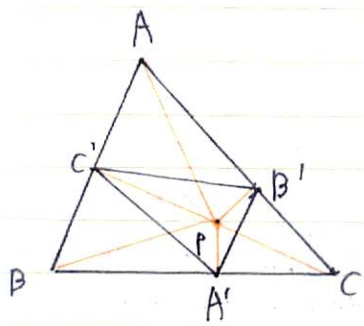


어떤 P점에서 각변에 수선의 발을 내려 만든 삼각형

△DEF : 수족삼각형 , P: 수족점 (pedal point)

if P = 수심(H) : 수심삼각형

P = 외심 : 중점삼각형



△APC', △APB', △PCB'
△PA'C, △PA'B, △PBC'의 외접원의 교점 : P

$\angle C' = \angle B' = 90^\circ$ 이므로

□AC'PB'는 원에 내접

△AB'C'에서 $\frac{B'C'}{\sin A} = AP$ (sine 법칙)

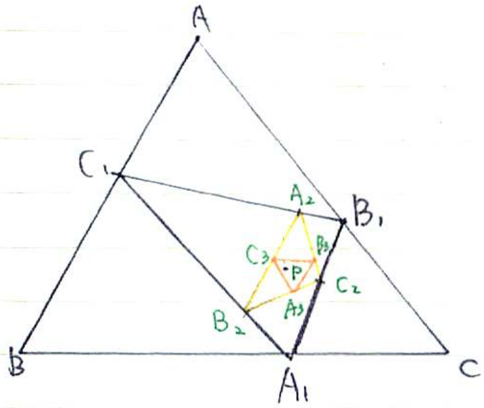
△ABC에서 $\frac{a}{\sin A} = 2R$

$\therefore B'C' = a \cdot \frac{AP}{2R}$

$C'A' = b\,\frac{BP}{2R}$

$A'B' = c\,\frac{CP}{2R}$

수족삼각형의 세변의 길이가 P점과 세 꼭지점사이 거리에서 결정된다



제 3의 수족삼각형

$\triangle A_3B_3C_3 \backsim \triangle ABC$

$(\because)$ $\angle C_1AP = \angle C_1B_1P$ (원주각)
$\angle B_1AP = \angle B_1C_1P$

마찬가지로 하면

$$\left(\begin{array}{l} \angle C_1B_1A_1 = \angle C_1AP + \angle A_1CP \\ \angle B_1A_1C_1 = \angle B_1CP + \angle C_1BP \\ \angle A_1C_1B_1 = \angle A_1BP + \angle B_1AP \end{array}\right) \times$$

(계속 원주각 사용) $\longrightarrow$

$\angle C_1AP = \angle C_1B_1P = \angle A_2B_1P = \angle A_2C_2P = \angle B_3C_2P = \angle B_3A_3P$

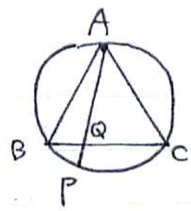
$\angle B_1AP = \angle B_1C_1P = \angle A_2C_1P = \angle A_2B_2P = \angle C_3B_2P = \angle C_3A_3P$

$\therefore \angle A = \angle B_3A_3C_3$

마찬가지로 하면

$$\begin{cases} \angle A = \angle B_3A_3C_3 \\ \angle B = \angle A_3B_3C_3 \\ \angle C = \angle B_3C_3A_3 \end{cases}$$

Ex) 1)

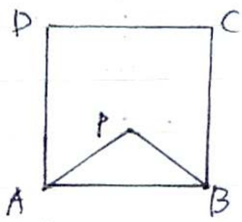


$\triangle ABC$: 정삼각형 일때

$$\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{PQ}$$

Hint : ① 넓이관계
② $\triangle PBD$가 정삼각형되는 D를 잡으면 (원밖에) $PQ \parallel BD$
⇒ 닮음비사용

2)



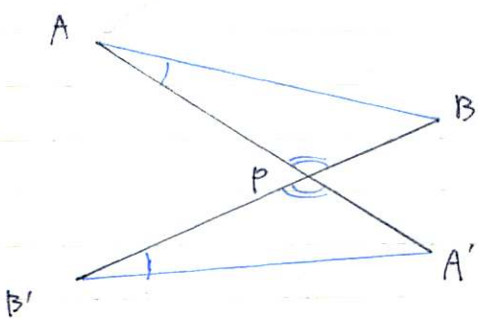
$\angle BAP = \angle ABP = 15°$

$\Rightarrow \triangle PCD$는 정삼각형

Hint : $\triangle PCB$가 이등변 삼각형임을 밝혀라

제2장、 원의 성질

1. 방멱 (power)



$PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$

내부에 P가 있을때

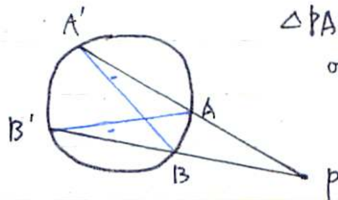
$(\because)$ $\triangle PAB \backsim \triangle PB'A'$ (원주각)

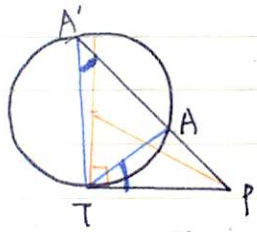
외부에 P가 있을때

$\triangle PAB' \backsim \triangle PBA'$

어쨌던 비례식은

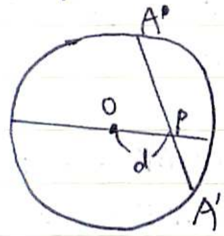
$PA' \cdot PA = PB \cdot PB'$





$PA\cdot PA' = PT^2 = d^2 - R^2$

(∵) $\triangle PTA \backsim \triangle PA'T$



$\overline{OP} = d \qquad (d<R)$

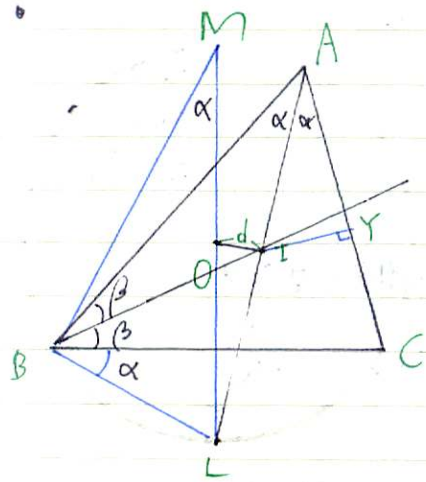
$PA\cdot PA' = (R+d)(R-d)$

$= R^2 - d^2$

※ 일반적으로 $OP=d$. 반지름 R 일때

$PA\cdot PA' = \underbrace{d^2-R^2}_{\text{방멱}}$ $\begin{cases} >0 : P\text{는 원 바깥. 이때는 }P\text{그점에서 그은 (접선의 길이}^2\text{)이다} \\ <0 : P\text{는 원 안쪽} \end{cases}$

방멱이 0인 자취 : 그 원



$\angle BAL = \angle CAL$

$\therefore L : \overset{\frown}{BC}$ 의 중점

$\alpha = \frac{A}{2}, \quad \beta = \frac{B}{2}$

$\angle BIL = \alpha + \beta = \angle LBI$

$\therefore \triangle BLI$: 이등변삼각형

$\therefore LI = LB \quad \cdots\cdots ①$

$R^2 - d^2 = LI\cdot IA = LB\cdot IA$

$= (LM \sin\alpha)\left(\frac{IY}{\sin\alpha}\right)$

$= 2R\cdot r$ $\qquad$ r : 내접원 반지름.

$\therefore d^2 = R^2 - 2Rr$

(따름) $R(R-2r) \geq 0$

$\therefore R \geq 2r$

2. 두 원의 근축 (radical axis)

원1) $x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \qquad c=a^2+b^2-r^2 \qquad$ 중심 (a,b)

원2) $x^2+y^2-2a'x-2b'y+c'=0 \qquad c'=a'^2+b'^2-r'^2 \qquad$ 중심 (a',b')

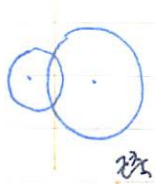
두원에서 방멱이 같은 점 (x,y) $\qquad a\neq a'$ or $b\neq b'$

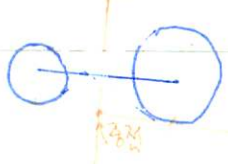
$x^2+y^2-2ax-2by+c = x^2+y^2-2a'x-2b'y+c'$

$(a'-a)x + (b'-b)y = \frac{c'-c}{2}$: 두 원의 근축

기울기 : $+\frac{a-a'}{b'-b}$ 이므로 중심사이의 기울기 $\frac{b'-b}{a'-a}$ 와 곱하면 -1 이므로

근축은 두 원중심을 이은 직선에 수직





∘ x축 위에 중심이 있고 y축이 근축인 두원

연립해보면 y축이 근축임을 쉽게 확인

$$\begin{cases} x^2+y^2-2ax+c=0 \\ x^2+y^2-2a'x+c'=0 \end{cases} \qquad c=c'$$

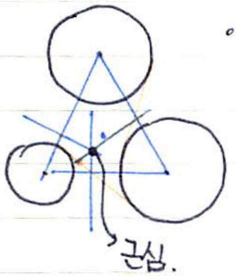
$$(x-a)^2+y^2=a^2-c>0$$

$$(x-a')^2+y^2=a'^2-c>0$$

$0<c<a^2$: 공근축원의 집합 (서로 두원이 만나지 않음)

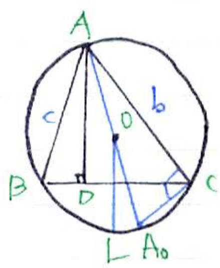
$c=0$: 두 원은 한점(원점)에서 만난다

$c<0$: 두원은 y축상 두점에서 만난다.



∘ 원 3개 (중심이 동일직선상에 주어지지 않음) 에서 방멱이 모두 같은 점은 딱 1개 존재한다 "근심"(radical center)

3. 삼각형의 높이와 수심



$AD=h_a$

$\triangle ABD \sim \triangle AA_0C \quad (\angle ABD=\angle AA_0C)$

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AC}{AA_0}$$

$$\frac{h_a}{c}=\frac{b}{2R} \qquad h_a=\frac{bc}{2R}$$

$$h_a=c\sin B = c\cdot\frac{b}{2R} = \frac{bc}{2R}$$

1) $h_a=\frac{bc}{2R}$

$\angle A_0AC=\angle BAD=90°-\angle B$

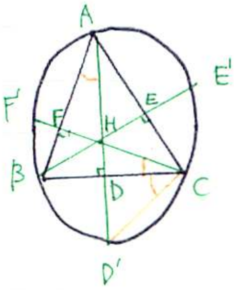
$\angle DAA_0 = A-2(90°-B)$

$= A+2B-180$

$= A+2B-(A+B+C)$

$= B-C \qquad$ ($B>C$ 인 경우)

2) $\angle DAO = |B-C|$



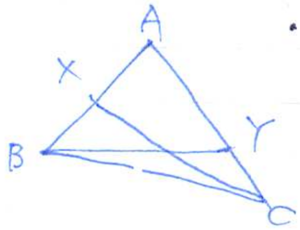
(수심 H).

$$\begin{cases} HD=DD' \\ HE=EE' \\ HF=FF' \end{cases} \qquad \angle HCD=\angle FAH=\angle DCD' \quad \therefore \triangle HDC\equiv\triangle D'DC$$

AB를 지름으로 하는 원은 D,E를 지나므로

$HB\cdot HE = HD\cdot HA$ 　　마찬가지로 $HD\cdot HA = HC\cdot HF$

$\therefore HB\cdot HE = HC\cdot HF = HA\cdot HD$



• △ABC에서

$\overleftrightarrow{AB}$위 임의의 점 X $\overleftrightarrow{AC}$위 임의의 점 Y를 잡으면

CX를 지름으로 하는 원과 BY를 지름으로 하는 원의 근축은 H를 지난다

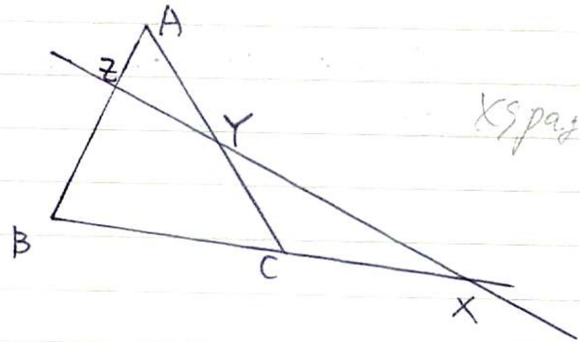
또 그런식으로 3개의 원을 그리면 그것의 근심은 H이다.

어떤 3점이 같은 직선 상에 있다 : 공선점

같은 점을 지나는 직선 : 공점선

○ △ABC와 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 상의 Z,X,Y 에서

X,Y,Z가 공선점일때



XSpage 선니 3

- 반전기하
- 부등식

- 변환 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

등거리사상 → • f가 거리를보존 i.e. $\forall A, B \in \mathbb{R}^2$, $\overline{AB} = \overline{f(A)f(B)}$

: 평행이동, 회전, 대칭, 과 그 합성 (모두 대칭의 합성으로 표현할 수 있다.)

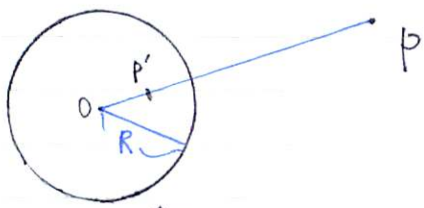
+ 확대(축소) : 모양보존

• f가 각을 보존.

: 거리보존하는 것. 모양보존하는 것. 반전 과 그합성

· 반전

① 원,직선 → 원,직선
② 각 보존
③ $\infty \leftrightarrow$ 기준원 중심

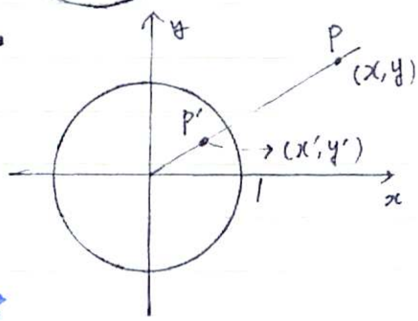


원O 와 점 P에 대해

$\overline{OP'} \cdot \overline{OP} = R^2$ (R: 원O 반지름)

되도록 $\overrightarrow{OP}$상에 P'를 잡는 것(변환)

원O에 대한 P의 반전 : P'



$$\begin{cases} x' = \alpha x \\ y' = \alpha y \end{cases} \quad (\alpha > 0)$$

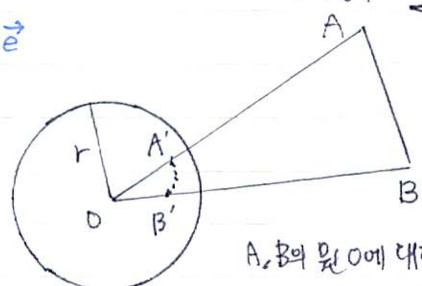
$$\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2} = 1$$

$$\alpha(x^2+y^2) = 1 \qquad \alpha = \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\therefore x' = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad y' = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$(x, y) \underset{}{\overset{\text{단위원에 대한 반전}}{\rightleftarrows}} \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

· 반전은 vector로 생각



A, B의 원 O에 대한 반전

A', B'

$\triangle OAB$와 $\triangle OA'B'$에서

$OA \cdot OA' = r^2 = OB \cdot OB'$

$$\frac{\overline{OA'}}{OB'} = \frac{OB}{OA}$$

$\therefore \triangle OA'B' \backsim \triangle OBA$

• $A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0$ 을 단위원에 반전시켜보자

$$A\left(\frac{x'^2}{(x'^2+y'^2)^2} + \frac{y'^2}{(x'^2+y'^2)^2}\right) + B\left(\frac{x'}{x'^2+y'^2}\right) + C\left(\frac{y'}{x'^2+y'^2}\right) + D = 0$$

양변 $\times\ (x'^2+y'^2)$

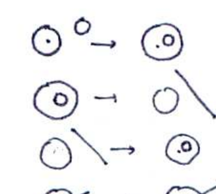
$$A + Bx' + Cy' + D(x'^2+y'^2) = 0$$

즉 원 → 원 (원점을 지나지 않을때 즉 $D \neq 0$)

→ 직선 (원점을 지날때 즉 $D = 0$)

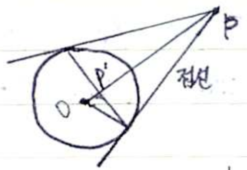
$A=0$ 직선 → 원 (원점을 지나지 않을때 즉 $D \neq 0$)

→ 직선 (원점을 지날때 즉 $D = 0$)



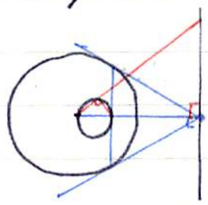
반전 작도

기준원에 수직이고 → P점을 지나는 원 2개를 그려 그 교점을 구해도 된다.

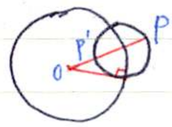


$OP : r = r : OP'$

$OP \cdot OP' = r^2$



· 기준원과 직교하는 원은 반전에 불변이다



$OP \cdot OP' = r^2$

· 반전을 다룰때 직선과 원은 동등하다.

(임의의 세점 — 원(직선)이 하나 결정된다.)

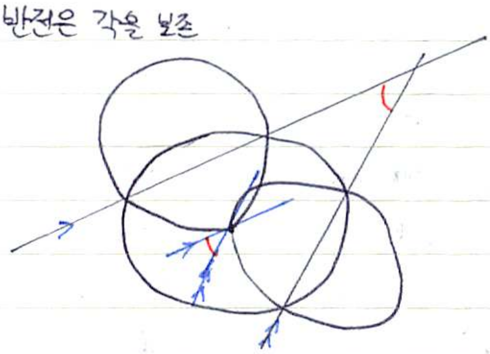
· 4점의 위치관계

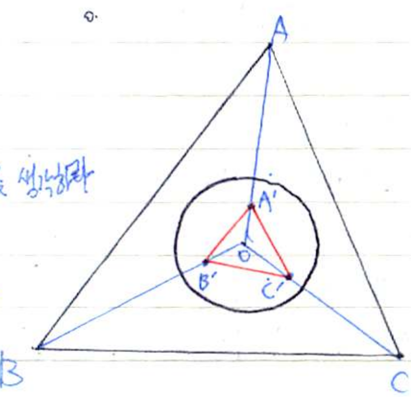
4점 A, B, C, D에서

일반적으로 $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$

등호조건 : A, B, C, D가 같은 원(직선) 상에 있을 때.

· 반전은 각을 보존





A의 상 : A' 마찬가지로 B, C의 반전 : B', C'

$\angle OBA = \angle OA'B'$ $(\angle BOC = \angle BAC + \angle ABO + \angle ACO)$

$\angle OCA = \angle OA'C'$ $\therefore \angle BOC = \angle A + \angle BAC'$

! $\triangle ABC$의 반전(점 A, B, C만 반전했을때)이 $\triangle A'B'C'$와 합동(작아도 닮음) 되도록 하는 기준원을 구할 수 있다.

$\left(\begin{array}{l} \angle BOC = \angle A + \angle A' \\ \angle COA = \angle B + \angle B' \end{array} \right)$ 되게 O를 잡고 크기를 조정.

(조건하나 더는 필요없다)

그런 O점선정 : "원주각"을 생각하라

(주의) 삼각형의 세 점만 반전했을 때 얘기다 실제로 삼각형의 반전은 (꽃) 모양이다.

· Feuerbach의 정리.

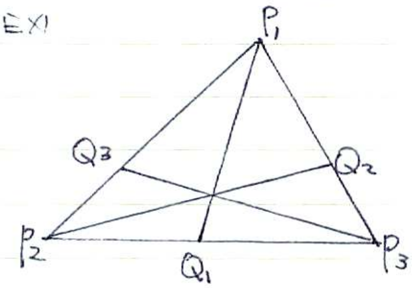
구점원

· 삼각형의 구점원은 내접원과 방접원 3개에 동시에 접한다

세개 수선의 발
세 변 중점
수심에서 세 꼭지점에 이르는 선분의 중점

(여름학교 노트참고)

EX)



$\frac{P_1P}{PQ_1}$, $\frac{P_2P}{PQ_2}$, $\frac{P_3P}{PQ_3}$ 중 적어도 하나는 2보다 크지 않고 적어도 하나는 2보다 작지 않음을 증명하라