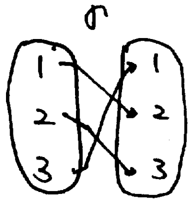
조합 수학 Combinatorics

{ 배열 가능성
배열의 개수
최적화 문제.

· 순열

$\sigma : S \longrightarrow S$ 전단사함수.



$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 231

∘ n개의 물건을 일렬로 배열하는 방법수 : $n!$

∘ n개중 k개를 뽑아서 일렬로 배열하는 방법수

$$P(n,k) = \underbrace{(n)(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}_{k\text{개}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

∘ n개중 k개를 뽑는 방법수

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

☆ ① $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ [illegible]
x_n가 속하는 것 $\binom{n-1}{k-1}$
x_n이 [illegible]

② $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$: Pascal의 公式

(해설) $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 에서
원소개수가 k개인 부분집합 : $\binom{n}{k}$

예제. $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$ 임을 보여라.

(풀이) n명에서 m명의 위원을 뽑고 그 중에서 다시 k명의 대표위원을 뽑는 방법수 $\binom{n}{m}\binom{m}{k}$

한편 먼저 대표 k명을 뽑고, 나머지 $n-k$명에서 $m-k$명을 뽑는 방법수 $\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$

$$\therefore \binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

예제. $\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$ 임을보여라.

증명. $|A|=m.$ $|B|=n.$ $A\cap B=\emptyset$

$A\cup B$에서 r개 뽑는 방법 $\binom{m+n}{r}$

한편 A에서 k개 뽑고 B에서 r−k개뽑아서 합하는 방법수

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$$

예제. 공간에 N개의 점이 있다. 어느 4개도 같은 평면에 있지 않다. 한 평면 π가 네점으로 이루어진 사면체와 만나서 생기는 사변형의 개수는 $\frac{1}{64}N^2(N-2)^2$ 이하임을 보이시오.

증명. 사면체 Δ가 평면 π와 사변형으로 만나기 위한 필요충분조건은 π의 양쪽에 꼭지점이 2개씩 있어야 한다.

지금 N개의 점 中 k개가 π의 한쪽에, N−k 개가 다른 쪽에 있다면 가능한 사변형의 개수는 많아야

$$\binom{k}{2}\binom{N-k}{2}$$ 이다.

$$\binom{k}{2}\binom{N-k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}\,\frac{(N-k)(N-k-1)}{2}$$

$$= \frac{1}{4}(N-k)k\cdot(N-k-1)(k-1)$$

$$\le \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\{N-k+k\}^2\left(\frac{N-k-1+k-1}{2}\right)^2 \qquad G.M \le A.M$$

$$= \frac{1}{64}N^2(N-2)^2$$

예제 $\sum_{r=0}^{n} P(n,r) = [\,n!e\,]$ 여기서 $e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$

[ ] : Gauss 기호.

임을 보여라

증명 $$n!e = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{n!}{r!} = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!} + \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{n!}{r!}$$
$$= \sum_{r=0}^{n} P(n, n-r) + \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{n!}{r!}$$
$$= \sum_{r=0}^{n} P(n, r) + \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{n!}{r!} = \sum_{r=0}^{n} P(n,r) + R$$

$$R = \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{n!}{r!} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots$$
$$< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+1)^5} + \cdots$$
$$= \frac{1}{n+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n} < 1$$
$$\therefore \quad 0 < R < 1$$
$$\therefore [n!e] = \sum_{r=0}^{n} P(n,r)$$

∘ 같은 것이 있는 경우의 순열

$$\overbrace{\underbrace{x_1, x_1, \cdots, x_1}_{n_1 개}, \underbrace{x_2, x_2, \cdots, x_2}_{n_2 개}, \cdots, \underbrace{x_r, \cdots, x_r}_{n_r 개}}^{n 개}$$

를 일렬로 배열하는 방법 수는

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}$$

예제 $\begin{cases} e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 8 \\ e_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$

의 정수해 (e_1, e_2, e_3, e_4) 의 개수는?

풀이. "||||||||***"의 배열이 해에 일대일 대응 된다.

예를 들어 *|||**||||| 는 $(e_1, e_2, e_3, e_4) = (0, 3, 0, 5)$에 대응된다.

구하는 정수해의 개수는 $\frac{(8+3)!}{8!\,3!}$

☆ 서로 다른 $\overset{n}{4}$종류의 물건 중에서 중복을 허락하여 $\overset{r}{8}$개를 뽑는 방법수는?

풀이. 물건 종류를 $A_1, A_2, A_3, A_4 \cdots A_n$

A_i에서 뽑힐 물건의 수를 e_i라 하자 $i = e$ $i = 1, 2, 3, 4 \cdots n$

그러면 $\begin{cases} e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + \cdots + e_n = \overset{r}{8} \\ e_1, e_2, e_3, e_4 \cdots e_n \geq 0 \end{cases}$ $\therefore$ 그 수는 $\frac{(8+3)!}{8!\,3!}$ $\binom{n+r-1}{r}$

· 이항계수

· 이항정리

n이 양의 정수일때 임의의 x에 대하여

$$\#\cdots\ (1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{n-r} x^r$$

예제. $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r} = n2^{n-1}$

풀이. $\#$의 양변을 미분

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r} x^{r-1}$$

$x=1$을 대입하면 $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r} = n\cdot 2^{n-1}$

◎ 확장된 이항계수.

실수 α, 정수 k에 대하여

$k>0$: $\displaystyle\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$

$k=0$ 일때 $\displaystyle\binom{\alpha}{0}=1$

$k<0$ 일때 $\displaystyle\binom{\alpha}{k}=0$

예. $k>0$

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{2^k}\ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k-3)}{k!}$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{2^k}\ \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(2k-4)(2k-3)(2k-2)}{k!\quad 2\cdot 4\cdots(2k-2)}$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}}\ \frac{(2k-2)!}{k!\,(k-1)!}$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{k\,2^{2k-1}}\binom{2k-2}{k-1}$$

정리 (뉴톤의 이항정리)

$\left|\frac{x}{y}\right|<1$ 일때 임의의 실수 α에 대해

$$(x+y)^{\alpha} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{\alpha}{r} x^r y^{\alpha-r}$$

따름정리. $|x|<1$ 일때

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{\alpha}{r} x^r$$

⊙ $\alpha=-n$ (n은 자연수) 일때

$$\binom{\alpha}{r} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-r+1)}{r!}$$

$$\binom{-n}{r} = \frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{r!}$$

$$\binom{-n}{r} = (-1)^r \frac{(n+r-1)(n+r-2)\cdots(n+1)n}{r!}$$

$$\therefore \binom{-n}{r} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r}$$

따름, n이 자연수일때

$$(1+x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{n+r-1}{r} x^r$$

따름. $$(1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r$$

생성함수

정의. 수열 $\{a_0, a_1, \cdots\}$ 에 대해

$g(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ 를 $\{a_r\}$의 생성함수

예, $a_n = 1$ → 생성함수 $1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$

보기, ~~P~~ n개 중 중복허락에서 r개를 뽑는 방법수 a_r의 생성함수?

$a_r = \binom{n+r-1}{r}$ 이므로

$$g(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r = (1-x)^{-n}$$

∘ $\begin{cases} e_1+e_2+e_3+e_4+e_5=r \\ 0 \le e_1, e_2, e_3 \le 1. \quad 0 \le e_4, e_5 \le 2 \end{cases}$

의 정수해 개수를 a_r 이라 하면

$g(x)=(1+x)(1+x)(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2)$

의 전개식에서

$x^{e_1}e^{e_2}x^{e_3}x^{e_4}x^{e_5}$ 꼴이 a_r개 있다

∴ a_r은 $g(x)$의 전개식에서 x^r 계수와 같다

∴ a_r의 생성함수는 $g(x)$이다.

예제1. 10원, 100원짜리, 500원짜리 동전을 합해 r 개 뽑는 가짓수는? 단 어느것도 4개 이하 택해야 함

풀이. $\left.\begin{array}{l} 10\text{원} - e_1\text{개} \\ 100\text{원} - e_2\text{개} \\ 500\text{원} - e_3\text{개} \end{array}\right\}$ 라 하면

a_r은 $\begin{cases} e_1+e_2+e_3=r \\ 0 \le e_1, e_2, e_3 \le 4 \end{cases}$

의 정수해의 개수와 같다.

∴ 따라서 대응되는 생성함수는

$g(x)=(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4)$

$=(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$

이고, a_r은 $g(x)$ 에서 x^r 계수와 같다

예제2. r개의 같은 물건을 서로 다른 5개 상자에 넣는 방법 수 a_r 의 생성함수를 구하라. 단, ①,② 상자에는 10개 이하 짝수개, 나머지 상자에는 3개이상 5개 이하를 넣는다.

풀이. 박스 ⓚ에 e^k 개 넣는다면

$\begin{cases} e_1+e_2+e_3+e_4+e_5=r \\ e_1, e_2 \in \{0,2,4,6,8,10\} \\ e_3, e_4, e_5 \in \{3,4,5\} \end{cases}$

따라서 그 방법수 a_r은 이것의 정수해와 같다.

∴ 생성함수는

$g(x)=(1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10})^2(x^3+x^4+x^5)^3$

◦ $\begin{cases} e_1+e_2+ \cdots + e_n = r \\ e_i \geq 0 \end{cases}$

의 정수해의 개수를 a_r 이라 하면

a_r의 생성함수는

$$(1+x+x^2+\cdots)^n = (1-x)^{-n}$$

그런데 $a_r = \binom{n+r-1}{r}$

생성함수는 $\sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r$

$$\therefore (1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r$$

◎ $(x^2+x^3+x^4+\cdots)^5$ 에서 x^{16}의 계수를 찾아라.

풀이.
$$g(x) = [x^2(1+x+x^2+\cdots)]^5 = \left[\frac{x^2}{1-x}\right]^5 = x^{10}(1-x)^{-5}$$

따라서 x^{16}의 계수는 $(1-x)^{-5}$ 에서 x^6의 계수와 같다.

$$\therefore \binom{5+6-1}{6} = \binom{10}{6} = \frac{10\times9\times8\times7}{24} = 210$$

주의. $f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$, $g(x) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r$

이면

$$f(x)g(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=r} a_i b_j\right) x^r$$

예제 4. 20명중 19명은 1원짜리를 한개씩 갖고 있고, 1명은 1원짜리와 5원짜리 1개씩 가지고 있다. 15원을 거둘수 있는 방법수를 구하여라. 한 사람은 많아야 동전 1개씩만 낼수있다.

풀이.
$$\begin{cases} e_1+e_2+\cdots+e_{19}+e_{20} = r \\ e_1, e_2, \cdots, e_{19} \in \{0,1\} \\ e_{20} \in \{0,1,5\} \end{cases}$$

$(1+x)^{19} = \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r$

$1+x+x^5 = \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^r$ 라 두면

$a_{15} = b_{15}c_0 + b_{14}c_1 + b_{10}c_5$

의 정수해의 개수를 a_r 이라 하면

a_r 생성함수

$$g(x) = (1+x)^{19}(1+x+x^5)$$

$$\therefore a_{15} = \binom{19}{15}\cdot 1 + \binom{19}{14}\cdot 1 + \binom{19}{10}\cdot 1$$

예제 5. 25개 동일한 공을 7개 상자에 넣는데 첫번째 상자에는 10개이하 넣는 방법 수를 구하여라.

(풀이) r개를 이와 같이 넣는 방법수 a_r은

$$\begin{cases} e_1+e_2+\cdots+e_7=r \\ 0\le e_1 \le 10 \\ e_2, e_3, \cdots, e_n \ge 0 \end{cases}$$

의 정수해와 같다

a_r의 생성함수

$$g(x)=(1+x+x^2\cdots+x^{10})(1+x+x^2+\cdots)^6$$
$$=\frac{1-x^{11}}{1-x}\left(\frac{1}{1-x}\right)^6$$
$$=(1-x)^{-7}(1-x^{11})$$

$(1-x)^{-7}=\sum b_r x^r$, $(1-x^{11})=\sum C_r x^r$ 라 두면

$$b_r=\binom{7+r-1}{r}=\binom{6+r}{r}$$

$$a_{25}=b_{25}C_0+b_{24}C_1+b_{23}C_2+\cdots+b_{14}C_{11}+\cdots+C_{25}$$
$$=b_{25}C_0+b_{14}C_{11}$$
$$=\binom{6+25}{25}-\binom{6+14}{14}$$
$$=\binom{31}{6}-\binom{20}{6}$$

- 분할문제 (partition)

자연수 r을 자연수의 합으로 나타내는 방법수 a_r을 생각하자. (순서무관)

a_r은 r개의 동일한 물건을 몇개의 무더기로 가르는 방법수와 같다

예) $r=3$
$$\begin{cases} 1+1+1 \\ 1+2 \\ 3 \end{cases}$$
$\therefore a_3=3$

$r=5$
$$\begin{cases} 1+1+1+1+1 \\ 1+1+1+2 \\ 1+1+3 \\ 1+2+2 \\ 1+4 \\ 2+3 \\ 5 \end{cases}$$
$a_5=7$

분할 내의 k의 개수를 e_k라 하면

$$\#\begin{cases} 1\cdot e_1+2e_2+3e_3+\cdots+ke_k+\cdots=r \\ e_i\ge 0 \end{cases}$$

분할의 개수 a_r은 이것의 정수해 개수와 같다.

$g(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)\cdots(1+x^k+x^{2k}+\cdots)\cdots$

의 형식적인 곱은 $x^{e_1}x^{2e_2}x^{3e_3}\cdots x^{ke_k}\cdots$

$\therefore$ $g(x)$에서 x^r의 계수는 #의 정수해의 개수와 같다 가

곧 $g(x)$는 a_r의 생성함수이다.

a_r의 생성함수는

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^k)\cdots}$$

예제 6. 2원짜리, 3원짜리, 5원짜리 우표를 r원어치 사는 방법수 a_r의 생성함수를 구하라.

이 문제를 다음처럼 보도 좋다
"r을 2, 3, 5의 합으로 나타내는 방법수 a_r의 생성함수를 구하라"

(풀이) a_r은

$$\begin{cases} 2e_2 + 3e_3 + 5e_5 = r \\ e_i \geq 0 \quad i = 2, 3, 5 \end{cases}$$

의 정수해와 같다.

따라서 a_r의 생성함수는

$$(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)$$

$$= \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)}$$

- 지수생성함수

$g(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r x^r}{r!}$ 을 수열 $\{a_r\}$의 지수생성함수 (exponential general function)

※ $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}$

예) $a_r = 1$의 지수생성함수 $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} = e^x$

$a_r = r$의 지수생성함수

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{r x^r}{r!} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{(r-1)!} = x \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} = xe^x$$

◎ a, b, c를 써서 만들 수 있는 길이 4인 단어의 수? 단 a는 두번 이상 사용할 것.

가능한 철자의 '집합' (multiset)

{a, a, a, a} {a, a, a, b} {a, a, a, c} {a, a, b, b} {a, a, b, c} {a, a, c, c}

이들 각각으로부터 만들어지는 단어의 수는 차례로

$$\frac{4!}{4!0!0!} \quad \frac{4!}{3!1!0!} \quad \frac{4!}{3!0!1!} \quad \frac{4!}{2!2!0!} \quad \frac{4!}{2!1!1!} \quad \frac{4!}{2!0!2!}$$

구하는 수는 이들의 합이다 77

$$* \begin{cases} e_1+e_2+e_3=4 \\ e_1 \geq 2 \\ e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$ 에서

아까 6개 수의 합은 $\displaystyle\sum_{*} \frac{4!}{e_1!e_2!e_3!}$

만약 같은 조건으로 길이 r개인 단어를 뽑았다면

$$\begin{cases} e_1+e_2+e_3=r \\ e_1 \geq 2 \\ e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

에 대해 $\dfrac{r!}{e_1!e_2!e_3!}$ 을 모두 합하는 것이 만들수 있는 단어수이다. (a_r)

한편

$$g(x)=\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2$$

에서 x^r 항은

$$\sum_{\substack{e_1e_2e_3 \\ (\text{조건을 만족})}} \frac{1}{e_1!e_2!e_3!}x^r = \left(\sum \frac{r!}{e_1!e_2!e_3!}\right)\frac{x^r}{r!}$$

이므로 a_r 의 생성함수는 $g(x)$ 이다.

예제 7. 20명의 사람을 3개의 방에 배치하되, 각 방에 적어도 한명이상 배치하는 방법의 수를 구하라.

사람 1 2 3 … 20
방 a b a c … a
$\begin{pmatrix} 1 \to a \\ 2 \to b \\ \vdots \\ 20 \to a \end{pmatrix}$

(풀이) 방을 a, b, c로 이름 붙이면 a, b, c를 사용해서 20자 길이의 단어를 만드는 방법수와 같다. (단 적어도 1회 이상 사용)

길이 r인 단어의 개수를 a_r 이라 하면 a_r은

$$* \begin{cases} e_1+e_2+e_3=r \\ e_i \geq 1 \end{cases}$$ 에 대해서

$$\sum_{*} \frac{r!}{e_1!e_2!e_3!}$$ 이다.

따라서 a_r 의 지수생성함수는

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^3 \\ &= (e^x-1)^3 \\ &= e^{3x}-3e^{2x}+3e^x-1 \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{3^r}{r!}x^r - 3\sum_{r=0}^{\infty}\frac{2^r}{r!}x^r + 3\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}x^r - 1 \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(3^r-3\cdot 2^r+3)}{r!}x^r - 1 \end{aligned}$$

∴ 따라서 $r \geq 1$ 에서

$a_r = 3^r - 3\cdot 2^r + 3$

$a_{20} = 3^{20} - 3\cdot 2^{20} + 3$

예제18. 일렬로 배열된 r장의 카드에 적, 황, 청의 3가지 색으로 칠하려한다. 적색카드가 짝수개 되도록 채색하는 방법수를 구하여라.

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$

$\therefore \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

(풀이) 문제 ⇔ a, b, c로 구성된 단어중 a가 짝수인 것의 개수 a_r (r : 길이)

구하는 것은 a_r 이다.

a_r의 지수생성함수는

$$g(x) = \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})e^{2x}$$

$$= \frac{1}{2}e^{3x} + \frac{1}{2}e^x$$

$$= \frac{1}{2}\sum \frac{3^r}{r!}x^r + \frac{1}{2}\sum \frac{1}{r!}x^r$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{3^r+1}{2}\right)\frac{x^r}{r!}$$

$\therefore \frac{x^r}{r!}$ 의 계수 $= a_r = \frac{3^r+1}{2}$

(요점)
$r a_r$의 생성함수는 구할수 있다.
: 미분후 x를 곱한다

● a_r의 생성함수 $g(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$

$$x\frac{dg(x)}{dx} = \sum_{r=0}^{\infty} r a_r x^r$$: $r a_r$의 생성함수.

문제) $a_r = 2r^2$ 의 생성함수를 구하라.

(풀이) $b_r = 1$ 의 생성함수: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$

$r b_r = r$ 의 생성함수 $x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2} = 1\cdot x + 2\cdot x^2 + 3\cdot x^3 + \cdots$

$r^2 b_r = r(r b_r)$의 생성함수 (r^2의 생성함수)

$$x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = x\frac{(1+x)}{(1-x)^3}$$

$\therefore$ $2r^2$의 생성함수 $2\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$

◎ 생성함수를 이용한 수열의 합

$C_r = a_0 + a_1 + \cdots + a_r$ 이라 하자.

$g(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ 일때 C_r 의 생성함수는 $\frac{g(x)}{1-x}$

(∵) $g(x)\cdot(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)$

$= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots) = \sum b_r x^r$

의 x^r의 계수는

$$\underset{b_0}{a_r\cdot 1} + \underset{b_1}{a_{r-1}\cdot 1} + \underset{b_2}{a_{r-2}\cdot 1} + \cdots + \underset{b_r}{a_0\cdot 1} = C_r$$

예제 10. $A = 3\cdot2\cdot1 + 4\cdot3\cdot2 + \cdots + (r+1)r(r-1)$

앞 페이지처럼
$a_r=1$ 부터 $a_r=r$
$a_r=r^2$, $a_r=r^3$ 식으로
미분하면서 구한다.

풀이) $a_r = (r+1)r(r-1) = r^3-r$

의 생성함수는 $g(x) = \dfrac{6x^2}{(1-x)^4}$

앞정리에 의해 A는 $6x^2(1-x)^{-5}$ 에서 x^r의 계수와 같다

A는 $6\times[\,((1-x)^{-5}$ 에서 x^{r-2} 의 계수$)\,]$

$$\therefore A = 6\times\binom{5+(r-2)-1}{r-2} = 6\binom{r+2}{4}$$

Ⅲ. 점화식.

(정의) 상수 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ $(a_k\neq0)$ 에서,

$H(n) = a_1H(n-1) + a_2H(n-2) + \cdots + a_kH(n-k)$ ..... ①

$n = k, k+1, \cdots$

→ k차 선형동차 점화식.

$H(n)=h(n)$ 이 ①을 만족하고, $\overbrace{h(0), h(1), \cdots, h(k-1)}^{\text{초기치}}$이
정해지면 수열 $\{h(n)\}_{n=0}^{\infty}$ 가 $\underbrace{\text{유일하게 결정}}_{(H(n)=h(n)\ \text{유일})}$.

점화식 ①에 대응하는
$x^k - a_1x^{k-1} - \cdots - a_{k-1}x - a_k = 0$
을 "특성방정식" 이라고 하고, 그 근을 특성근 이라 한다
$a_k\neq0$ 이므로 특성근 $\neq 0$

정리: 수 $q\,(\neq0)$에 대하여
$H(n)=q^n$ 이 ①을 만족 $\Leftrightarrow$ q가 특성근

증명) $H(n)=q^n$ 이 ①을 만족

$\Leftrightarrow$ $q^n - a_1q^{n-1} - a_2q^{n-2} - \cdots - a_kq^{n-k} = 0$

$\Leftrightarrow$ $q^{n-k}(q^k - a_1q^{k-1} - \cdots - a_k) = 0$

$\Leftrightarrow$ $q^k - a_1q^{k-1} - \cdots - a_k = 0$

$\Leftrightarrow$ q가 특성근

(Q.E.D)

⊙ $f(n)$, $g(n)$ 이 ①을 만족하면

① $F(n) = f(n)+g(n)$ 도 ①을 만족

② $G(n) = cg(n)$ 도 ①을 만족 (단 c는 임의의 상수)

$(\because)$ ① $a_1F(n-1)+a_2F(n-2)+\cdots+a_kF(n-k)$

$= a_1[f(n-1)+g(n-1)]+a_2[f(n-2)+g(n-2)]+\cdots+a_k[f(n-k)+g(n-k)]$

$= \underbrace{a_1f(n-1)+a_2f(n-2)+\cdots+a_kf(n-k)}+\underbrace{a_1g(n-1)+a_2g(n-2)+\cdots+a_kg(n-k)}$

$= f(n) + g(n)$

$= F(n)$

② $a_1G(n-1)+a_2G(n-2)+\cdots+a_kG(n-k)$

$= c\{a_1g(n-1)+a_2g(n-2)+\cdots+a_kg(n-k)\}$

$= c\ g(n)$

$= G(n)$

$(\because)$ ← 바로 위에 있는 성질 이용

정리. $h_1(n), h_2(n), \cdots, h_t(n)$ 이 ①을 만족

$\Longrightarrow c_1h_1(n)+\cdots+c_th_t(n)$ 도 ①을 만족

일차결합 ↑ $\quad c_1, c_2, \cdots, c_t$: 임의의 상수.

프린트물 참고 ←

정리, $q_1, \cdots, q_k$ 가 서로 다른 특성근일 때 (중근X)

$H(n)=c_1q_1^n+c_2q_2^n+\cdots+c_kq_k^n$

($c_1, c_2, \cdots, c_k$ 는 임의의 상수)

이 ①의 일반해.

예제) $a_n=a_{n-1}+a_{n-2} \quad a_0=a_1=1$

특성방정식 : $x^2-x-1=0$

특성근 $x=\dfrac{1\pm\sqrt5}{2}$

일반해 $a_n=c_1\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)^n+c_2\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)^n$

$a_0=c_1+c_2=1$

$a_1=c_1\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)+c_2\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)=1$

연립하면 $c_1=\dfrac{1+\sqrt5}{2\sqrt5} \quad c_2=\dfrac{1-\sqrt5}{-2\sqrt5}$

$\therefore a_n=\dfrac{1+\sqrt5}{2\sqrt5}\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)^n+\dfrac{1-\sqrt5}{-2\sqrt5}\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)^n$

예제1. 숫자 1, 2, 3 으로 만들수 있는 n자리 정수중 1이 2개 연속되지 않는 것의 개수를 구하라

(풀이) 그것을 a_n 라 하자 $\quad$ p.3

$a_1 = 3 \quad (\because 1, 2, 3)$

$a_2 = 8 \quad (\because 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33)$

a_n

$2 \times \times \times \cdots \times$

$3 \times \times \times \cdots \times \rightarrow a_{n-1}$ 가지

$1\ 2 \times \times \cdots \times$

$1\ 3 \times \times \cdots \times \rightarrow a_{n-2}$ 가지

$\therefore a_n = 2(a_{n-1} + a_{n-2})$

$a_n - 2a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0 \qquad a_1 = 3,\ a_2 = 8$

✡: ✡는 계산과정 간단히 하는데 큰 공헌을 한다

$(\therefore a_0 = 1$ 로 끼워 맞춰 놓자✡$)$

특성방정식 : $x^2 - 2x - 2 = 0$

특성근 $x = 1 \pm \sqrt{3}$

$\therefore a_n = C_1(1+\sqrt{3})^n + C_2(1-\sqrt{3})^n$

$n=0$: $C_1 + C_2 = 1$

$n=1$: $C_1(1+\sqrt{3}) + C_2(1-\sqrt{3}) = 3$

연립하자 $\rightarrow$ $C_1 = \frac{2\sqrt{3}+3}{2}$

$C_2 = \frac{-2\sqrt{3}+3}{2}$

$$\therefore a_n = \frac{2\sqrt{3}+3}{2}(1+\sqrt{3})^n + \frac{-2\sqrt{3}+3}{2}(1-\sqrt{3})^n$$

상수항이 없어야 특성방정식을 쓸수있다

(문제) $a_n - 2a_{n-1} = 1$ 을 생성함수로 풀어보라 $\quad a_1 = 1$

(풀이) $g(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ 라 두자.

$a_0 = 0$ 이라고 약속해도 점화식 만족한다.

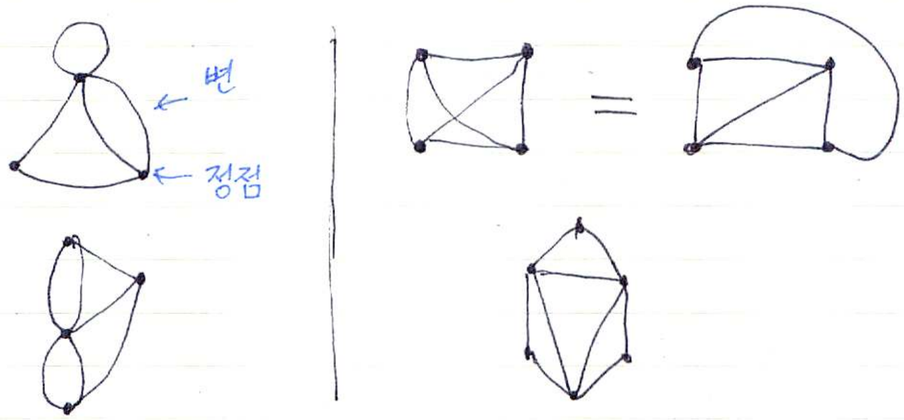
$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$
$$+ \underline{\boxed{-2x\,g(x) =} \quad -2a_0 x - 2a_1 x^2 - 2a_2 x^3 - \cdots}$$
$$(1-2x)g(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$\therefore g(x) = \frac{1 \cdot x}{(1-2x)(1-x)} = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} (2^r - 1) x^r$$

$\therefore a_r = 2^r - 1$

그래프 이론

· 그래프는 다음과 같은 것들이다

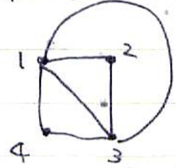


· 중복된 원소를 허용하는 집합을 다원집합 이라 한다. (*multiset*)

예) $\{1, 1, 2\}$ $\{a, b, b, c, c\}$

· 그래프 G는 집합의 순서쌍 (V, E)로서, E는 $V \times V$의 원소를 그의 원소로 하는 다원집합이다. 여기서 V의 원소를 정점이라 하고, E의 원소를 변이라 한다.

(예)



$E = \{[1,2], [2,3], [1,3], [1,3], [1,4], [4,3]\}$

$V = \{1, 2, 3, 4\}$

· 각 정점에서 그에 연결된 변의 수를 그 정점의 차수라 하며, 양 끝점을 한 정점에 갖는 변 ("고리") 에 대하여는 차수를 계산할 때 두번 센다. 정점 a의 차수는 $\delta(a)$로 표시한다.

그러면 임의의 그래프 $G = (V, E)$ 에 대하여

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$$

는 명백하다.

EX①) 어떤 모임에서 홀수번 악수한 사람의 수효는 짝수번이다. (자신과는 못함)

EX) 모서리의 수가 총 7개인 다면체가 존재하는가?

풀이: $v = |V|$, $e = |E|$ 라 하자.

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2e \geq 3v$$

$e = 7 \quad \therefore \quad v \leq 4$

다면체가 되려면 $v = 4$

그런데 이 경우 $e = 6$

$\therefore$ $e = 7$인 다면체는 존재하지 않는다.

- 그래프 $G=(V,E)$에서

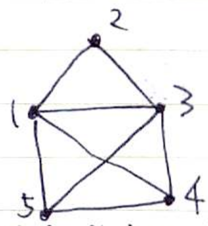
$$E \subseteq V\times V - \Delta \quad , \quad \Delta = \{[v,v] \in V\times V\}$$

이면, G는 "단순그래프"라 한다.

- 그래프 $G=(V,E)$에서

정점의 열 $v_1, v_2, \cdots, v_k$가 통로라 함은 모든 $i=1,2,\cdots,k-1$에 대해 $[v_i, v_{i+1}] \in E$ 일때이다. 이때 $v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}$가 모두 서로 다르면 기본통로라 부른다.

시작점과 끝점이 같은 (기본)통로를 (기본)회로라 한다.



1, 2, 3, 4, 5, 1 : 기본회로

1, 3, 5, 4, 3, 2, 1 : 회로

통로(또는 회로)의 길이는 그 속에 있는 변의 수이다

◦ 그래프의 임의의 두점을 잇는 통로가 존재하면 "그래프는 연결되었다"고 한다.

예)

연결된 그래프

연결되지 않은 그래프

◦ 연결되지 않은 그래프는 연결 성분들의 합이다. 여기서 연결 성분이란 최대의 연결된 부분그래프들이다.

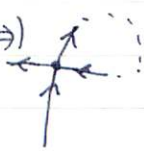
◦ $H=(V', E')$이 그래프 $G=(V,E)$의 부분 그래프라 함은

$$V' \subset V, \quad E' \subset E$$

이다.

◦ 그래프 G에서 모든 점을 한 번씩 포함하는 통로(회로)를 오일러 통로(회로)라 한다.

(⇒)



정리: 연결된 그래프가 오일러회로를 가질 필요충분조건은 모든 정점의 차수가 짝수라는 것이다.

따름정리: 연결된 그래프가 시작점과 끝점이 다른 오일러 통로를 가질 필요충분 조건은 차수가 홀수인 정점이 단 2개 존재한다는 것이다.

∴(⇐) 어떤점에서 회로를 하나 만든다. 이때 이 회로가 오일러회로라면 증명된것이다. 회로를 만들수있는 이유는, 모든 정점의 차수가 짝수이므로 시작점이 아니면 반드시 끝날수 없기 때문이다.

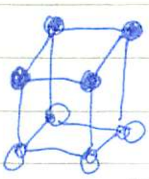
오일러회로가 아니라면, 방금 만든 회로의 어떤 점에서, 다시 회로를 만들 수 있다. 왜냐면 차수가 짝수인 것이 회로를 만들면서 변을 지우더라도, 보존되기 때문이다. 이런후 아까 회로와 이회로를 연결할수있다.

다시말하면 처음 그린 회로가 $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_k, v_1$라고 하고 편의상 v_1에서 두번째로 회로를 그렸을때 $v_1, w_1, w_2, w_3, \cdots, w_m, v_1$ 라 하면

$v_1, v_2, \cdots, v_k, v_1, w_1, w_2, w_3, \cdots, w_m, v_1$ 이 다시 회로가 되기 때문이라는 말이다.

다시 이것이 오일러회로가 아니면 같은 작업의 반복으로, 유한회한 후 오일러 회로가 된다.

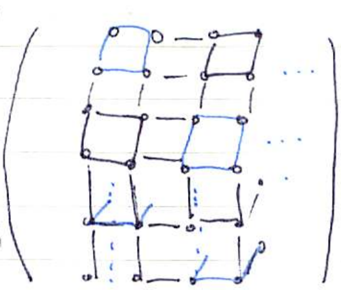
EX) 흰색 또는 검은색의 단위 정육면체 k^3개를 쌓아서 큰 정육면체를 만들되, 각각의 단위 정육면체에서 이웃한 단위 정육면체 중 2개만이 이 단위 정육면체와 같은 색깔이 되도록 할 수 있는가?



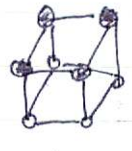
(풀이) 격자로 구성된 그래프를 생각해볼때 몇개의 기본회로로 모든 정점을 포함할수있으면 된다. 상하, 좌우, 전후의 변을 쌍으로 가져야 하므로 그 길이는 짝수이다. 그런데 기본회로에서는 포함된 정점의 수가 길이와 같으므로 기본회로들의 길이의 합은 k^3이고 이는 짝수여야 하므로 k는 짝수이다.

∴ 일단 k는 짝수이다

각 정육면체의 중심을 정점으로 하고 같은 색 정점끼리 변으로 잇는다. 이때 각점 차수가 2이니 오일러회로 존재! 상하 좌우 전후가 쌍으로 존재하니 오일러회로 길이는 짝수 정점수는 짝수 따라서 k는 짝수



역으로 k가 짝수이면



의 형태를 엇갈려 쌓으면 된다.

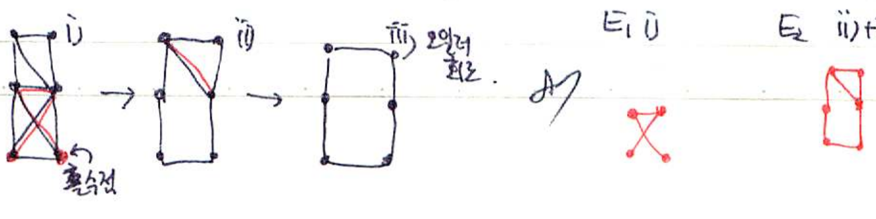
정리) 연결된 그래프 $G=(V, E)$가 오일러 회로를 갖지 않을때 다음 조건을 만족하는 부분그래프 $G_i=(V_i, E_i)$, $i=1,\cdots,k$ 가 존재한다.

(i) G에서 차수가 홀수인 정점의 수효는 $2k$ 이다.

(ii) G_i는 오일러 통로를 가진다.

(iii) $E=E_1 \cup \cdots \cup E_k$

(iv) $E_i \cap E_j = \emptyset$ $i \neq j$



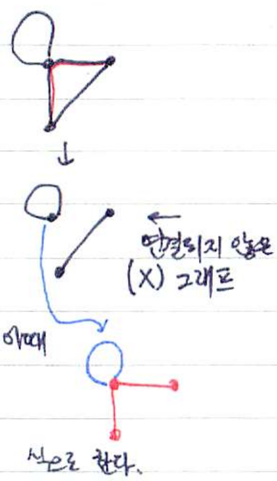
(증명) 차수가 홀수인 점의 수효는 짝수이므로 이를 $2k$라 하고 k에 대한 귀납법을 쓰자.

서로 다른 홀수점 x, y를 뽑고, G는 연결되어 있으므로 x, y 사이에 통로를 하나 잡아 α라 하자. 만약 α가 반복되는 변을 가지면

예를 들어 $x \cdots a, b, \cdots, a, b \cdots y$ 또는

$x \cdots a, b, \cdots, b, a, \cdots y$

과 같이 되면 밑줄 그은 부분을 버리는 것에 의해 α가 변을 반복하지 않는다고 가정할 수 있다



$G'=(V', E')$는 G에서 α를 제거하여 얻은 그래프라 하자.

이때 G'의 연결성분중 오일러 회로를 포함하는 것이 있다면 이것을 α에 포함시킨다. 따라서 G'의 연결성분은 모두 오일러 회로를 갖지 않게 할 수 있고, 각각의 연결성분에서 차수가 홀수인 정점은 $2k-2$ 이므로 귀납법에 의해 이들 연결성분은 정리의 조건을 만족하는 부분그래프 $k-1$ 개로 나눌 수 있다. (q.e.d)

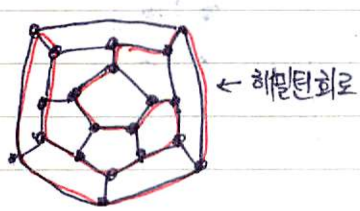
EX k개의 변을 가지는 연결된 그래프 G의 각 변에 $1, 2, \cdots, k$의 번호를 붙이되, 2개 이상의 변에 속하는 G의 정점에서는 번호들의 최대공약수가 1이 되게 붙일 수 있음을 보여라.

(풀이) 위의 정리에 의해 얻은 부분 그래프들의 오일러통로를 따라 연속한 번호를 붙이면 된다.

∘ 그래프 G에서 모든 정점을 포함하는 기본 통로(또는 회로)를 해밀턴 통로(또는 회로)라고 한다.

(예)

정12면체를 펼친 모양 →



필요충분조건은 말지 못한다

· 정리 $n(\geq 3)$개의 정점을 가지는 단순 그래프가 임의의 두 정점에서의 차수의 합이 n 이상이라는 성질을 가지면 해밀턴 회로를 가진다.

(증명) 이 그래프는 당연히 연결되어야 하는데 그 이유는 만약 연결되지 않았다고 하면 다른 연결성분에 속하는 두 정점 x_1, x_2를 잡아 보면

$$\delta(x_1) + \delta(x_2) \leq (n_1 - 1) + (n_2 - 1) \leq n - 2 < n$$

(여기서 n_1, n_2는 x_1과 x_2가 속하는 연결성분의 정점의 수들이다.)

가 되어 가정에 모순이다. //

두 정점이
인접: 사이에
변이 있는 것.

이 그래프에서 길이가 최대인 기본통로 $\alpha = x_1, x_2, \cdots, x_r$ 로 잡자.

그러면 $x_1, \cdots, x_r$ 이 아닌 정점이 x_1 또는 x_r에 인접할 수 없다

여기서 다음 2가지 경우를 생각한다

(i) x_1과 x_r 이 인접한 경우

이때 $r<n$ 이면 $x_1, \cdots, x_r$ 과는 다르고 이들 중 어느하나 (예를들어 x_i)와 인접한 정점 y가 존재한다. 그러면 기본통로 $y, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_r, x_1, \cdots, x_{i-1}$ 는 α보다 길므로 모순

$\therefore r=n$ 이고 α는 해밀턴 회로가 된다. ($[x_r, x_1]$ 까지 쓰면 회로가 될수 있다)

(ii) x_1과 x_r이 인접하지 않는 경우

이때 다음 성질을 증명하자.

「 $2 \le i \le r-1$ 인 i가 존재하여 x_1은 x_i와 인접하고 x_r은 x_{i-1}과 인접한다.」

x_1과 x_r에 인접한 것은 α에 밖에 없다 (∵ α는 최대길이의 기본통로)

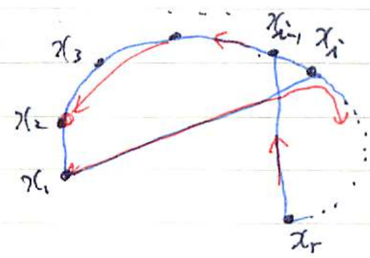
(∵) 만일 이성질을 부정하면

$$\delta(x_r) \le (r-1) - \delta(x_1)$$

이 되어야 하고

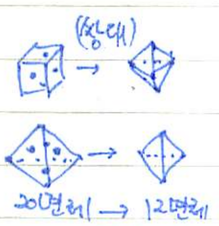
$$\delta(x_1) + \delta(x_r) \le r-1 < n$$

가 되어 가정에 모순



따라서 위의 성질에 의해 $x_1, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_r, x_{i-1}, x_{i-2}, \cdots, x_2$ 이 길이가 최대인 기본통로가 되고 x_1과 x_2는 인접해있으므로 (i)의 경우에 의해 해밀턴 회로를 얻을 수 있다

따름정리: $n(\ge 3)$ 개의 정점을 가지는 단순 그래프가 임의의 정점에서 차수가 $\frac{n}{2}$ 이상이면 해밀턴 회로를 가진다.



EX 정 20면체의 표면에 폐곡선을 그리되 꼭지점을 지나지 않으면서 모든 면을 한번씩 지나게 할 수 있다

page 2에 이미 그려놓았다. (풀이) 이것은 정 12면체에서 해밀턴 회로를 찾는 문제와 같다.

· 임의의 서로 다른 두 정점 사이에 단 하나의 기본통로가 존재하는 (단순) 그래프를 수형도라 한다.

정리. 다음은 (단순)그래프 $G=(V,E)$ 에 대하여 동치이다.

(i) G가 수형도이다

(ii) G가 연결되어있고 회로가 없다.

(iii) G는 연결되어있고 $|E| = |V| - 1$

pf

(v) G는 회로가 없고 임의의 두 정점 사이에 새로운 변을 추가하면 회로가 생긴다.

(증명) (i) ⟹ (ii) G는 당연히 연결되어 있고
만약 G에 회로 $x_1, x_2, \cdots, x_r, x_1$ 가 있다면,
중복을 제거하여 이것이 기본회로임을 가정할 수 있고, 그러면
x_1과 x_r 사이에 서로 다른 2개의 기본통로가 생기므로 모순.

(ii) ⟹ (iii) 임의의 정점에서 출발하여 길이가 최대인 기본통로를 잡으면
다른쪽 끝이 되는 정점의 차수는 1 이어야 한다

회로가 없다는 조건이 → 사용됨

여기서 차수가 1인 정점과 이에 연결된 변을 G로부터 제거하면
정점의 수와 변의 수는 하나씩 줄고, 정점의 수에 대한 귀납법을
쓰면 증명된다.

(iii) ⟹ (iv) 만약 한 변 e를 제거해도 연결되어 있다면, e를 포함하는 기본회로
α가 G에 존재해야 하고, α에 연결된(α아닌) ~~부분에서~~ 차수가 1인 정점하나와
그에 연결된 변을 하나씩 제거해 나가면
회로들이 연결된 형태만 남게 되고, 회로에서는 변의 수와 정점의 수와
같으므로 이때는 변의수 ≥ 정점의 수가 되므로

$$|E| = |V| - 1$$

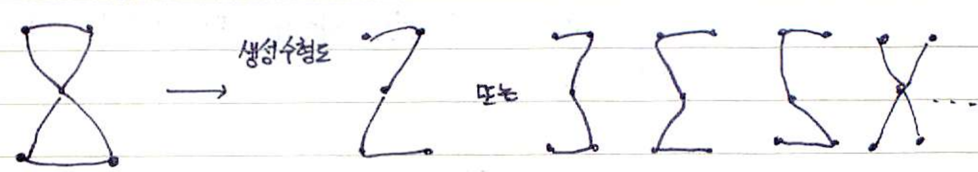
에 모순된다

(iv) → (v) 회로가 있으면 회로내의 한변을 제거해도 연결되어 있으므로
회로는 없다. 새로운 변을 추가하여 회로가 생기지 않는다면 원래
연결되지 않았다는 것이므로 모순

(v) → (i) 인접하지 않은 임의의 두정점을 x, y라 하고, x, y사이에
변을 추가하여 $x, y, a_1, \cdots, a_r, x$ 가 생기고 중복을 제거하여 이를
기본회로라 가정할수있다. 그러면 $y, a_1, \cdots, a_r, x$는 x, y 사이의
기본통로가 된다. 만약 x, y 사이에 서로다른 기본통로가 2개 존
재했다면 회로가 없다는 것에 모순

• G의 부분그래프 중 G의 모든 정점을 포함하는 수형도를 생성수형도라 한다.

(예)



따름 정리. n개의 정점과 n개 이상의 변을 가지는 그래프에는 반드시 기본회로가 있다.

정리. T_1, T_2가 그래프 G의 생성수형도이고 변 f가 T_1에는 속하나 T_2에는 속하지 않는다고 하자.

이때 T_2에 어떤 변 e가 있어 T_1에서 f를 제거하고 변 e를 추가하여 얻어진 그래프 T_3도 생성수형도이다.

(증명) 변 f를 T_2에 추가하면 기본회로가 생기고 e들이 기본회로에 속하는 변중의 하나라 하자. 그러면 정리에서와 같이 얻어진 T_3는 수형도 임은 분명하고 T_3의 변의 수는 T_1 또는 T_2의 그것과 같고, 따라서 T_3는 G의 모든 정점을 가진다 //

· 변이 교차하지 않도록 평면에 그릴수 있는 그래프를 평면그래프라고 한다. 평면그래프 기본회로로 둘러싸인 변이 있다. 이때 $|V| = v$. $|E| = e$. ' 바깥쪽 면을 포함한 면의수를 f 라하면 다음 정리가 성립한다.
(그래프가 평면을 분할하는 수)

정리. 평면 그래프 G에 대하여

$$v - e + f = 2$$

증명. 생성수형도에 대하여는 $v-e+f=2$는 항상 성립
왜냐면 $v=e+1$. $f=1$ 이기 때문이다.
G는 그의 생성 수형도로부터 변들을 추가하여 얻어지고 변들이 추가될때마다 회로가 새로 생기며 평면그래프이므로 이때마다 면이 새로 생긴다. 따라서 e가 하나 늘면 f도 하나 늘므로 공식은 G에 대해서도 성립.

Ex1 오각형의 면 10개로 이루어진 볼록다각형은 존재하는가?


108°
$108° \times 3 < 360°$
$108° \times 4 > 360°$
볼록다면체에서 면각에서 n개의 각의 합 $< 2\pi$

(풀이) (볼록다각형은 평면그래프에 대응된다.)
각 꼭지점에 면이 3개 모여야 하므로
$f = \frac{3v}{5} = 10$
v는 정수 라는것에 모순

서로다른 두 정점이 인접한 단순그래프를 완전그래프라 하고 정점의 수가 n이면 K_n으로 나타낸다.

K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 . . . .

K_{n+1}은 K_n을 부분그래프로 갖는다.

정리: K_n이 평면 그래프일 필요충분조건은 $n \le 4$ 이다.

(증명) ($\Leftarrow$) : 명백
($\Rightarrow$) $n \ge 5$ 이면 K_n은 K_5를 부분그래프로 가지므로 K_5가 평면그래프가 아닌

것을 증명하자.

K_5가 평면 그래프라 가정하면

$v=5 \qquad e=\binom{5}{2}=10$

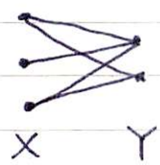
$5-10+f=2 \qquad f=7$

그런데 면은 변이 최소 3개 이상 있어야 생기므로

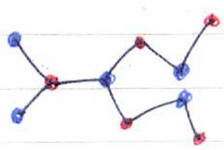
$\frac{3f}{2} \le e$

그런데 $\frac{21}{2} < 10$ 은 성립안하므로 모순

단순그래프 $G=(V,E)$ 에서 $V=X\cup Y$, $X\cap Y=\emptyset$, $X\neq\emptyset$, $Y\neq\emptyset$ 이고 X에 들어있는 정점들은 인접하지 않고 Y에 들어있는 정점들끼리도 인접하지 않으면 G를 이분 그래프라 한다



정리. 수형도는 이분그래프이다



(증명) 어느 한 정점을 기준으로 거리(사이에 들어있는 변의 수)가 홀수인 점과 짝수인 점으로 나누면 된다.

m개의 정점과 n개의 정점으로 나누어진 이분그래프가 두 집합에 각각 속하는 임의의 두 정점이 인접해 있다는 성질을 가지면 완전이분 그래프라 하고 $K_{m,n}$ 으로 나타낸다.

$K_{1,1} \qquad K_{2,2} \qquad K_{2,n}$

정리. $K_{m,n}$이 평면 그래프일 필요충분조건은 $m\le 2$ or $n\le 2$ 이다.

(증명) $(\Leftarrow)$: 명백

$(\Rightarrow)$: $m,n \ge 3$ 에 대해 $K_{m,n}$은 $K_{3,3}$을 부분그래프로 가진다.

따라서 $K_{3,3}$이 평면 그래프가 아님을 보이자.

$K_{3,3}$이 평면 그래프라 가정하면

$v=6, \quad e=9$

$6-9+f=2 \qquad \therefore f=5$

이분 그래프에는 모든 회로는 길이가 짝수여야 하므로 기본회로의 길이는 4이상이다. 따라서

$\frac{4f}{2} \le e. \qquad \frac{20}{2} \le 9$ 이므로 모순

· 정리. 그래프 G가 평면 그래프일 필요충분조건은 G가 K_5 또는 $K_{3,3}$를 부분 그래프로 가지지 않는다는 것이다.

(증명) ($\Leftarrow$) : 명백

($\Leftrightarrow$): 미완결