해석 1 수열과 급수

· 이항정리

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \qquad -1 < x < 1$$

여기서 $\binom{a}{n} = \dfrac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}$

· Taylor 전개

$f(x)$: 무한번 미분가능할때

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \rightleftharpoons \text{Talyor 전개}$$

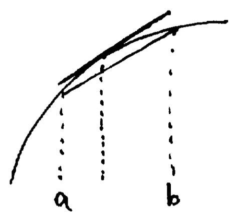
↳ '해석적'

예) $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \cancel{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$

· 중간값 정리

$f(x)$ $\begin{cases} \text{연속 on } [a,b] \\ \text{미분가능 in } (a,b) \end{cases}$



$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x)$ $\quad x \in (a,b)$ 인 x가 존재

· L'Hospital 법칙 $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ 또는 둘다 $\pm\infty$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (\text{단 } f, g : \text{미분가능})$$

◎ 교대급수 ($\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, $a_n > 0$: 부호가 바뀌어 가면서 가는 급수)

만약 $a_k \downarrow 0$ (0으로 단조감소) $\Longrightarrow$ ① $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$: 수렴한다

☆② $S_k = \sum_{n=1}^{k} (-1)^n a_n$

$S = \lim_{k\to\infty} S_k = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 라 할때

$0 < (-1)^{k+1}(S - S_k) < a_k$

(증명) $(-1)^n (S - S_n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_{n+k}$

$= (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots > 0$

$(-1)^n (S - S_n) = a_{n+1} - \sum_{k=1}^{\infty} (a_{n+2k} - a_{n+2k+1})$

$< a_{n+1}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2}$ 가 무리수

(문제) $\rho(n) = \#\{\text{소수} \le n\}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\rho(n)}{n!}$ 가 무리수

· 문제 ①
$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2n+mn^2+2mn}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+n+2}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \left\{\left(1-\frac{1}{n+3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{\cdots}\right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{\cdots}\right) + \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{\cdots}\right) + \cdots\right\}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right) + \cdots\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right) + \cdots\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) + 1 + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) + \frac{7}{4}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{7}{4}\right)$$
$$= \frac{7}{4}$$

· 문제 ② $(u_n)_1^{\infty}$: 0 이 아닌 항이 무수히 많은 정수들의 유계수열.

$(v_n)_1^{\infty}$: 양의 정수들

(1) $v_n \le v_{n+1}$

(2) $n \mid v_1 v_2 \cdots v_n$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{v_1 v_2 \cdots v_n} \text{ 은 무리수이다.}$$

· 이 문제 사실에서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$, $\displaystyle e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, $\displaystyle e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$ 등이 무리수라는 사실이 나온다.

(문제) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right) = \frac{1}{4}(x - \sin x)$ Hint: $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

문제 ③ $$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}\sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right)=\frac{1}{4}(x-\sin x)$$

sol.)
$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}\sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right)\\
&=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(3^n\sin\frac{x}{3^n}-3^{n-1}\sin\frac{x}{3^{n-1}}\right)\\
&=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(3^n\sin\frac{x}{3^n}-\sin x\right)\\
&=\frac{1}{4}\left\{\lim_{n\to\infty}3^n\sin\frac{x}{3^n}-\sin x\right\}\\
&=\frac{1}{4}\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{3^n}}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}-\sin x\right\}\\
&=\frac{1}{4}\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{3^n}\cdot x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\log\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^n\log\frac{1}{3}}-\sin x\right\}\\
&=\frac{1}{4}\left(x\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{3^n}-\sin x\right)\\
&=\frac{1}{4}(x-\sin x)
\end{aligned}$$

문제 ④ $0\le x<1$ 일때 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[2^n x]}}{2^n}=1-2x$$ 임을 보여라.

sol $0\le x<1$ 이므로 $x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2^k}$, $a_k=0$ or 1 로 표현 가능하다.

$$[2^n x]=a_1 2^{n-1}+a_2 2^{n-2}+\cdots+a_n$$

$$(-1)^{[2^n x]}=(-1)^{a_n}\begin{cases}=-1 & (a_n=1)\\ =1 & (a_n=0)\end{cases}=1-2a_n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[2^n x]}}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-2a_n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^{n-1}}$$
$$=1-2x$$

문제 ⑤ $$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$$

sol.)
$$\begin{aligned}
\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)&=\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&=\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n}\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\frac{k+1}{k}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

문제⑥ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$ 이 무리수임을 증명하라

p.f.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} = \frac{M}{N}$ 이라 가정하자. $N, M \in \mathbb{N}$

양변에 $(N!)^2$을 곱하면

$$\frac{M}{N}(N!)^2 = (N!)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$$

$$\frac{M}{N}(N!)^2 - (N!)^2 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n!)^2} = (N!)^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$$

좌변이 정수이므로 우변도 정수이다.

우변 $R = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(N!)^2}{(n!)^2}$ 라 두면

$$R = \frac{(N!)^2}{((N+1)!)^2}\left\{ 1 + \frac{1}{(N+2)^2} + \frac{1}{(N+2)^2(N+3)^2} + \cdots \right\}$$

$$\leq \frac{1}{(N+1)^2}\left\{ 1 + \frac{1}{(N+1)^2} + \frac{1}{(N+1)^4} + \cdots \right\}$$

$$= \frac{1}{(N+1)^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{(N+1)^2}}$$

$$= \frac{1}{(N+1)^2 - 1} < 1$$

$\therefore R < 1$

또

$$R > \frac{(N!)^2}{((N+1)!)^2} > 0$$

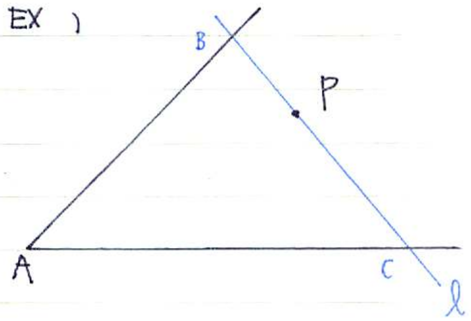
$\therefore R > 0$

$0 < R < 1$ 인 정수 R은 존재하지 않으므로 모순

$\therefore$ R은 유리수가 아니다 $\Rightarrow$ R은 실수 중 무리수.

기하 부등식

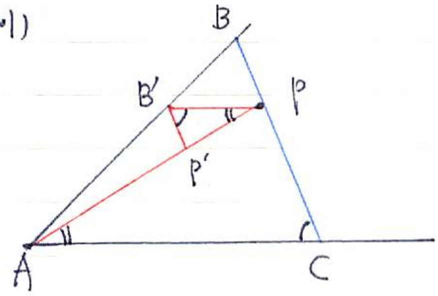
EX)



∠A와 점 P가 주어져있다.
점 P를 지나는 임의의 직선 l과 ∠A와의 교점을 B, C라 하자.
$\frac{1}{BP}+\frac{1}{PC}$ 이 최대가 되게 하는 l은? (작도하라)

USAMO

(풀이)



$$\frac{B'P'}{BP}=\frac{AP'}{AP}$$

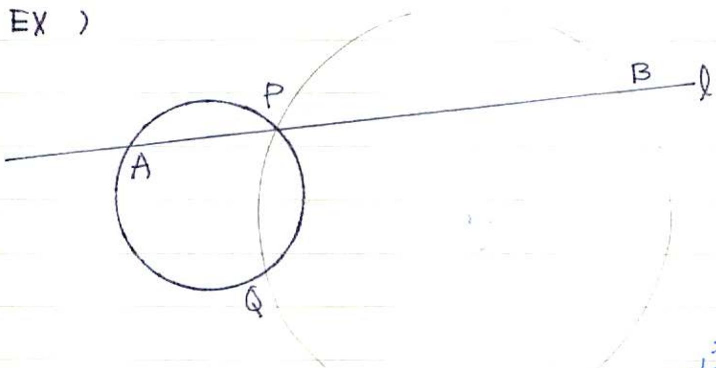
$$\frac{AP}{PC}=\frac{PP'}{B'P'}$$

$$\therefore \frac{1}{BP}+\frac{1}{PC}=\frac{AP'}{B'P'\cdot AP}+\frac{PP'}{B'P'\cdot AP}=\frac{1}{B'P'}$$

∴ B'P'을 최소가 되게 하자.
B', AP는 고정되어 있으므로 최소이려면 $\angle B'P'P = 90°$.
∴ 직선 l을 AP와 직교하도록 작도하면 된다.

EX ①) ∠A와 점 P가 주어져있다. 점 P를 지나는 직선 l과 ∠A와의 교점을 B, C라 하자.
1) BP·PC를 최소로 하는 l은?
2) △ABC 면적의 최소를 만드는 l은?
3) 선분 BC가 최소로 되는 l은?
4) △ABC 둘레 길이의 최소화.

EX)



AP·BP 가 최대가 되도록 하는 직선 l은?

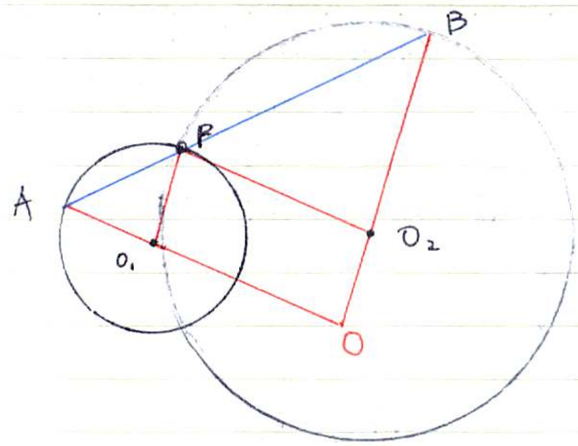
접점을 이은 선분이 단 P를 지나도록 해야

(풀이) 두 원이 공통으로 내접하는 원을 O라 하고, A,B가 두 접점이 되도록 l을 잡자. l 아닌 임의의 l'와 두원의 P 아닌 교점을 A', B'라 하자.

$PA\cdot PB > PA'\cdot PB'$ 이므로

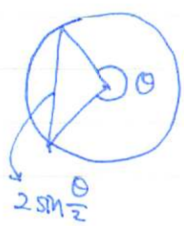
두원이 공통으로 외접하고, 그 접점을 이은 직선이 P를 지나야 한다.

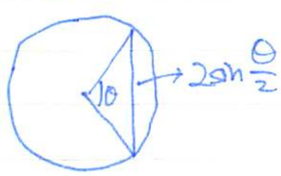
다음 페이지



□O_1PO_2O 가 평행사변형되도록 O를 잡는다면
$\overline{OA}=\overline{OB}$ 될것이므로 구하는 원의 중심이 O 이다. 또 그때 P를 AB가 지난다
작도는 O_1P에 평행하게 O_2에 직선그어 B, 마찬가지로 O_2P에 평행하게 O_1에서 직선그어 A라 하면

EX) 반경 1인 원의 내부에 내접하는 n각형의 둘레길이의 최대는?
($n \geq 3$ 은 상수)





(풀이) 각 변에 대한 중심각을 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ 라 두면

$$\Sigma \theta_k = 2\pi. \quad \because 0<\theta_k<2\pi$$

θ_k에 대한 현의 길이는 $2\sin\frac{\theta_k}{2}$ 이므로
둘레길이

$$= 2\left(\sin\frac{\theta_1}{2} + \sin\frac{\theta_2}{2} + \cdots + \sin\frac{\theta_n}{2}\right)$$

$\sin x$ 는 $(0,\pi)$에서 위로 볼록하므로 Jensen부등식에 의해

$$\geq 2n\sin\frac{2\pi}{2n}$$

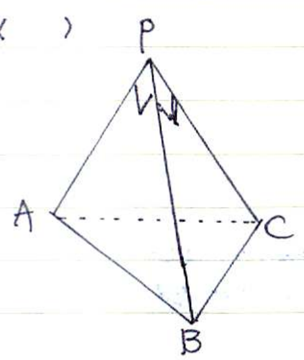
$$= 2n\sin\frac{\pi}{n}$$

등호조건은 $\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_n$ ∴ 정n각형일때 둘레가 최대..
최대값은 $2n\sin\frac{\pi}{n}$

EX②) 반경 1인 원의 내부에 내접하는 삼각형 넓이의 최대는?

$S=2R^2\sin A\sin B\sin C$
$\therefore \ <A,B,C<\pi$

EX) $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=90°$
변의 길이의 합 $=S$
부피 V의 최대는?



(풀이) 밑면을 △ABP로 보면 CP는 높이이다

$$V=\frac{1}{6}abc \qquad (AP=a,\ BP=b,\ CP=c)$$

$$S = a+b+c+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$$

$$S \geq 3\sqrt[3]{abc}+\sqrt{2}\sqrt{ab}+\sqrt{2}\sqrt{bc}+\sqrt{2}\sqrt{ca} \geq 3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt{2}\sqrt[3]{abc}$$

100

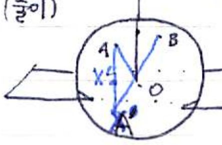
$$=(3+\sqrt{2})\sqrt[3]{6V}$$

$$V \le \frac{S^3}{6(3+3\sqrt{2})^3}$$ 등호는 $a=b=c$

EX③) 바로 앞 문제에서 $90°$ 대신 2θ라 두고 풀어보라.

EX) 반지름이 1인 구면상에 길이가 2보다 짧은 곡선이 있다. 그 곡선은 어느 한 반구에 완전히 포함됨을 보여라.

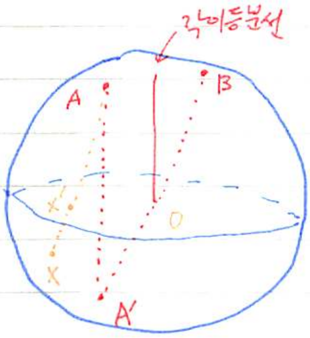
(풀이)



→ 평면 π : 각 $\angle AOB$ 의 이등분선과 수직인 평면이고 원 구 중심 O를 지남.

이 제 곡선은 A, B를 포함하는 반구에 완전히 포함됨을 보인다.

(모순을 찾자 → 적당한 점(곡선상) X가 있어서 X가 다른 반구 또는 평면에 포함된다고 하자.



AX와 평면이 만나는 점 X'

$AX = AX' + XX'$ 삼각부등식

$\therefore AX + BX = AX' + XX' + \cancel{BX} \ge AX' + BX'$

A' : π에 관한 A의 대칭점

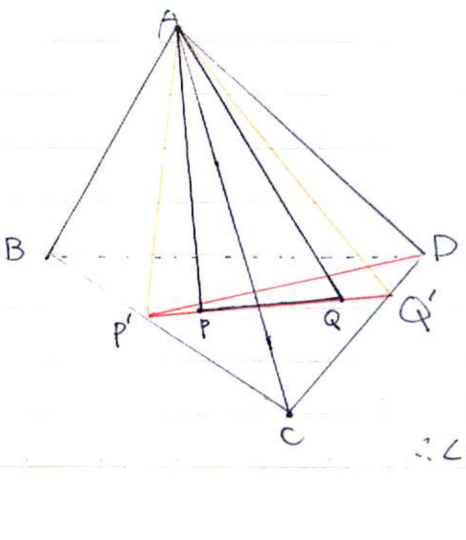
A', O, B 는 일직선 상

$AX' + BX' = A'X' + BX' \ge A'B^{(\text{지름})} = 2$ 삼각부등식

(곡선길이) $\ge AX + BX \ge 2$ .... 모순 .... 평면 π로 자르면 된다

EX) 정사면체 ABCD 내부에 두 점 P, Q가 있다.
$\angle PAQ < 60°$ 임을 보여라.

(증명) P, Q가 밑면 $\triangle BCD$ 내부에 있고, 한 변의 길이가 1 이라 가정해도 무방하다.



$\triangle BAP' \equiv \triangle BDP'$

$\therefore AP' = P'D$

$\triangle P'DQ'$ 에서

$\angle P'Q'D > \angle P'CQ' = 60°$

$\angle P'DQ' < \angle BDQ' = 60°$

$\therefore P'D > P'Q'$ $\therefore AP' > P'Q'$

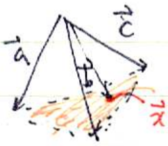
마찬가지로 $AQ' > P'Q'$

$\therefore \triangle AP'Q'$ 에서 $\angle P'AQ'$ 가 최소 ($P'Q'$가 최소니까)

$\therefore \angle P'AQ' < \frac{180}{3} = 60$ $\therefore \angle PAQ < 60°$

EX ④) 사면체 ABCD 내부에 두점 PQ가 있을때
$\angle PAQ \le \max\{\angle BAC, \angle CAD, \angle DAB\}$

Hint :



$\vec{x} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c}$

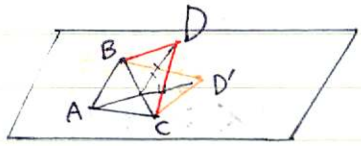
$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$

$0 \le \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \le 1$

EX) A,B,C,D : 공간상 4점
조건 : 6개의 길이 AB, AC, AD, BC, BD, CD 중
1보다 큰것은 많아야 하나이다.
6개 길이의 합의 최대는?

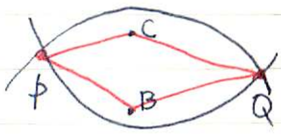
(풀이) AD가 일보다 클 가능성이 있다고 하자

D가 ABC와 다른 평면에 있다면

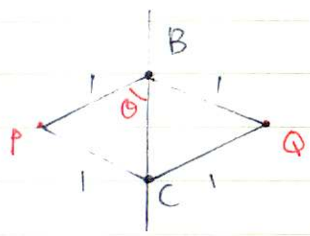


같은 평면상에 $\triangle BCD \equiv \triangle BCD'$ 되게 하면
$AD' > AD$ (삼각부등식)

∴ A,B,C,D 는 한 평면에 있을때 최대이다.
A, D는 B, C를 중심으로 하는 반지름 1인 원 공통부분에 있어야 한다.



∴ B, C가 고정된다면, 길이 합 최대는 A=P, D=Q 인 경우 일때이다
(P, Q는 두 원의 교점)



길이의 합 $= 4 + 2(\sin\theta + \cos\theta)$
$= 4 + 2\left(\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

최대값은

$\frac{\pi}{3} \le \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 에서이다

최대값은 $4 + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 5 + \sqrt{3}$

EX) $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD = \angle DPA = \theta < \frac{\pi}{2}$. P, A, B, C, D : 서로다른 5점
이때 $\angle BPD + \angle APC$ 의 최대 최소?

풀이 : 최소 0

최대 : $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ 를 고려하자

$\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = \|\vec{c}\| = \|\vec{d}\| = 1$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{d} = \vec{d}\cdot\vec{a} = \cos\theta$

$(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{d}) = 0$

$(\vec a-\vec c)\perp(\vec b-\vec d)$ 또는 $\vec a=\vec c$ or $\vec b=\vec d$

회대에서 벗어난

$(\vec a-\vec c)\cdot(\vec a+\vec c)=0$ $(\vec a+\vec c)\perp(\vec a-\vec c)$

$(\vec a+\vec c)\cdot(\vec b-\vec d)=0$ $\perp(\vec b-\vec d)$

$(\vec b+\vec d)\cdot(\vec b-\vec d)=0$ $(\vec b+\vec d)\perp(\vec b-\vec d)$

$(\vec a-\vec c)\cdot(\vec b+\vec d)=0$ $\perp(\vec a-\vec c)$

$\therefore (\vec a+\vec c)\parallel(\vec b+\vec d)$

$(\vec a+\vec c)\cdot(\vec b+\vec d)=\pm\|\vec a+\vec c\|\,\|\vec b+\vec d\|$

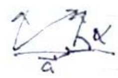
$4\cos\theta=\pm\|\vec a+\vec c\|\,\|\vec b+\vec d\|$

−인 경우 $\theta<\frac{\pi}{2}$에 모순

$\therefore 4\cos\theta=\|\vec a+\vec c\|\,\|\vec b+\vec d\|$

$\angle BPD=\beta$ $\angle APC=\alpha$로 두면

$\|\vec a+\vec c\|^2=\|\vec a\|^2+\|\vec b\|^2+2\vec a\cdot\vec c$



마찬가지로 하면

$4\cos\theta=2\sqrt{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)}$

$4\cos^2\theta=(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)$

$\cos^2\theta=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$

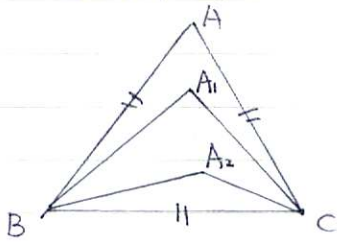
$\frac{1}{2}\{\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})+\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})\}=\cos^2\theta$

$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=2\cos^2\theta-\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})\geq 2\cos^2\theta-1$

$\alpha+\beta\leq 2\arccos(2\cos^2\theta-1)$

(arc cos는 감소함수)

EX) 도형 F에 대해서 $\sigma(F)=\frac{F\ 넓이}{(F\ 둘레)^2}$로 정의하자.



이때 $\sigma(A_1BC)>\sigma(\triangle A_2BC)$임을 보여라

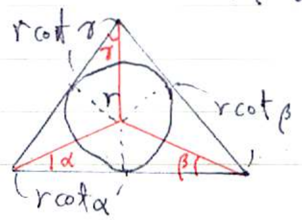
(풀이) 문제를 풀려면, △DEF에서 $0<\angle E,\angle F<60°$일때

σ(DEF)는 ∠E와 ∠F에 대한 증가함수임을 보이면 된다.

둘레 L

△DEF의 면적 $=\frac{1}{2}rL$. (r : 내접원의 반경)

$\sigma(\triangle DEF)=\frac{\frac{1}{2}rL}{L^2}=\frac{r}{2L}$



$L=2r(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma)$

$\therefore \sigma(\triangle DEF)=\frac{1}{4(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma)}$

$$\frac{1}{4S(\triangle DEF)} = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)$$
$$= \cot\alpha + \cot\beta + \tan(\alpha+\beta)$$
$$= \cot\alpha + \cot\beta + \frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\cot\alpha\cot\beta-1}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\cot\alpha\cot\beta-1}$$

$\cot\alpha = p.\quad \cot\beta = q$

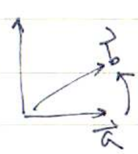
$0<\alpha<30^\circ \qquad p.q>\sqrt{3}$

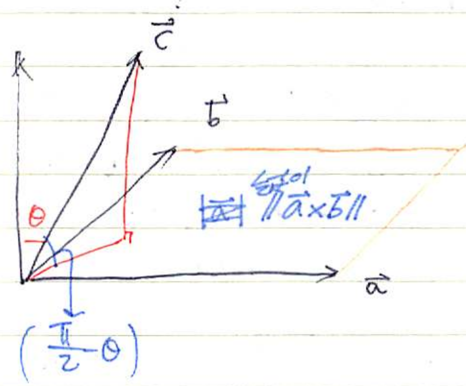
$$\frac{1}{4S(\triangle DEF)} = p+q+\frac{p+q}{pq-1}$$

$p.q$의 함수로서 $p>\sqrt{3}.\ q>\sqrt{3}.$ 일때 증가함을 보이면 된다

(참고) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 에 의해 생성되는

평행육면체부피 $V = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$





$$V = \left|\, \|\vec{a}\times\vec{b}\|\,\|\vec{c}\|\cos\theta \,\right|$$
$$= |\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}|$$
$$= \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot (c_1, c_2, c_3) \right|$$
$$= \text{절댓값}\left| \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \right|$$

밑에서 계속

$$V^2 = (abc)^2(1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma)$$

$$\therefore V = |abc|(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}$$

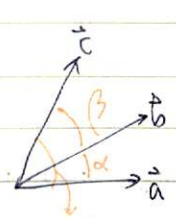
↳ 평행육면체 부피.

$$\because V^2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c} \end{vmatrix}$$

$\|\vec{a}\| = a$

$\|\vec{b}\| = b$

$\|\vec{c}\| = c,$



$$V = \begin{vmatrix} a^2 & ab\cos\alpha & ac\cos\gamma \\ ab\cos\alpha & b^2 & bc\cos\beta \\ ac\cos\gamma & bc\cos\beta & c^2 \end{vmatrix} = (abc)^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\gamma \\ \cos\alpha & 1 & \cos\beta \\ \cos\gamma & \cos\beta & 1 \end{vmatrix}$$

함수

① 다항함수 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ $\quad a_n \neq 0$

차수 (degree) : n

중근2개로세자

$\begin{cases} n = \text{홀수} \Rightarrow \text{실근을 적어도 하나 갖는다.} & (\text{실근의 개수: 홀수개}) \\ n = \text{짝수} & (\text{실근의 개수: 짝수개}) \end{cases}$

② $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ $\quad (a_n \neq 0)$

$P(x) = 0$는 n개의 근을 갖는다

(실근+복소수근)

③ $P(a) = 0 \iff P(x) = (x-a)\,Q(x)$

$Q(x)$ → 다항함수.

④ $P(a) - P(b) = (a-b)\,Q(a,b)$

$$\begin{array}{rl} \because & a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \cdots + a_1 a + a_0 = P(a) \\ - &)\ a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0 = P(b) \\ \hline & a_n (a^n - b^n) + a_{n-1}(a^{n-1} - b^{n-1}) + \cdots + a_1 (a-b) = (a-b)\,Q(a,b) \end{array}$$

⑤ $P(x)$: 차수가 n인 다항식

$P(x)$가 $n+1$개의 근을 가졌다

$\Longrightarrow P(x) \equiv 0$

⑥ $x^n = 1$

$x^n - 1^n = 0$

$(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = 0$

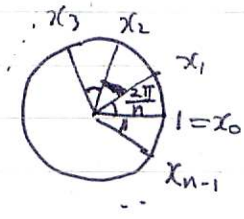
$x = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

$\begin{cases} x = 1 & \cdots ① \\ x = \cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n} & \cdots ② \end{cases}$

$k = 1, 2, \cdots, n-1$

① : $x = 1$

② : $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$ 의 해



EX1) $P(x^2+1) = P(x)^2 + 1$, $\quad P(0) = 0$

$\Longrightarrow P(x) = ?$

단 $P(x)$는 다항식(함수)

(풀이) $P(0) = 0$

$P(1) = P(0)^2 + 1 = 1$

$P(2) = P(1)^2 + 1 = 2$

$P(2^2+1) = P(2)^2 + 1 = 5$

$P(5^2+1) = P(5)^2 + 1 = 26$

$\vdots$

$P(x) - x = 0$ 의 근이

$0, 1, 2, 2^2+1, (2^2+1)^2+1, \cdots$

$\therefore P(x) \equiv x$

Ex 2) $f(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_1 x + 1$

A, B 두사람이 서로 교대로 a_i중 하나의 값을 선택하여

자기 원하는 숫자로 넣는다고 한다. A가 먼저시작했을때 B가 이기는 법은?

B가 이기는 것은 실근을 가질때이다.

(풀이) B가 끝 두 계수가 남을 때는

i) A가 홀수차항 계수 바꾸면 → B는 짝수차항계수바꿈

ii) A가 짝수차항 계수 바꾸면 → B는 홀수차항계수바꿈

나중 B가 선택할때 남은 항을

$a_s x^s,\ a_t x^t$ 라면

$$f(x) = P(x) + a_s x^s + a_t x^t$$

i) t가 홀수 s: 짝수

$$f(1) = P(1) + a_s + a_t$$

$$+)\ f(-1) = P(-1) + a_s - a_t$$

$f(1) + f(-1) = P(1) + P(-1) + 2a_s = 0$ 되게 a_s를 잡자.

즉 $a_s = -\frac{1}{2}(P(1) + P(-1))$ 로 잡으면 $f(1) + f(-1) = 0$

이므로 $f(1)\, f(-1) \le 0$

「중간값의 정리」 반드시 $[-1, +1]$ 에서 실근이 생긴다

ii) s, t : 홀수

$$f(-1) = P(-1) - a_s - a_t$$

$$f(2) = P(2) + 2^s a_s + 2^t a_t$$

$$2^t f(-1) + f(2) = 2^t(P(-1)) + P(2) + (2^s - 2^t)a_s = 0$$

$$a_s = \frac{2^t(P(-1)) + P(2)}{2^s - 2^t}$$ 로 하면

$2^t f(-1) + f(2) = 0$ 이므로

$2^t f(-1) \ge 0$ $f(2) \le 0$ 또는 $2^t f(-1) < 0,\ f(2) > 0$

이게 되어 근이 $[-1, 2]$에서 존재한다.

Ex 3) 다항식 $P_0(x), P_1(x), \cdots, P_{n-2}(x)$ $n \ge 2$ 와 $S(x)$가

$P_0(x^n) + xP_1(x^n) + \cdots + x^{n-2}P_{n-2}(x^n) = (x^{n-1} + \cdots + x + 1)\,S(x)$ 를

만족시킬때, $(x-1) \mid P_i(x)$ $(i = 0, \cdots, n-2)$ 임을 보여라.

(풀이) $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$ 의 근을 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 라 두면

$x^n - 1 = 0$ 이므로 $x_k^n = 1$

위 관계식에 x_k를 대입해보자.

$$P_0(1) + x_k P_1(1) + \cdots + x_k^{n-2} P_{n-2}(1) = 0$$

좌변의 차수는 많아야 $n-2$차인데 근은 $(n-1)$개에서 성립하게 되므로 이식은 항등식이다.

계수비교법 $\therefore P_k(1)=0$

$\therefore (x-1) \mid P_i(x)$

Ex 4. $P(x)$: 정수계수 다항식

a_1 : 정수

$a_2=P(a_1)$

$a_3=P(a_2)$

$\vdots$

$a_n=P(a_{n-1})$

$a_1=P(a_n)$

$\Longrightarrow$ $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 중에는 서로 같은 것이 있다.

(풀이) $a_2-a_3=P(a_1)-P(a_2)=(a_1-a_2)Q(a_1,a_2)$

$a_3-a_4=P(a_2)-P(a_3)=(a_2-a_3)Q(a_2,a_3)$

$\vdots$

$a_{n-1}-a_n=P(a_{n-2})-P(a_{n-1})=(a_{n-2}-a_{n-1})Q(a_{n-2},a_{n-1})$

$a_n-a_1=P(a_{n-1})-P(a_n)=(a_{n-1}-a_n)Q(a_{n-1},a_n)$

$a_1-a_2=P(a_n)-P(a_1)=(a_n-a_1)Q(a_n,a_1)$

모조리곱하면

$(a_1-a_2)(a_2-a_3)\cdots(a_{n-1}-a_n)(a_n-a_1)$

$=(a_1-a_2)(a_2-a_3)\cdots(a_{n-2}-a_{n-1})(a_{n-1}-a_n)Q(a_1,a_2)\cdots Q(a_n,a_1)$

만약 서로 같은 것이 없다면

$Q(a_1,a_2)Q(a_2,a_3)\cdots Q(a_n,a_1)=1$

$Q(a_1,a_2)=\pm 1$

$\vdots$

$Q(a_n,a_1)=\pm 1$

$a_2-a_3=a_1-a_2$ 또는 $a_2-a_3=-(a_1-a_2)$ $\therefore a_1=a_3 \rightarrow$ 가정 모순

$\therefore a_2-a_3=a_1-a_2$

마찬가지로 $a_3-a_4=a_2-a_3$

$a_4-a_5=a_3-a_4$

$\vdots$

$\therefore$ $a_1-a_2=a_2-a_3=a_3-a_4=\cdots=a_{n-1}-a_n=a_n-a_1$

$a_1>a_2 \Leftrightarrow a_2>a_3 \Leftrightarrow a_3>a_4 \cdots \Leftrightarrow a_n>a_1$: 모순

$a_1<a_2 \Leftrightarrow a_2<a_3 \Leftrightarrow a_3<a_4 \cdots \Leftrightarrow a_n<a_1$: 모순

$\because$ ($\because a_1 \not< a_1$)

Ex 5. n차 다항식 $P(x)$가 $P(k)=\frac{k}{k+1}$, $k=0,1,\cdots,n$을 만족시킬때 $P(n+1)=?$

Ex 6. $f(x)\,f(x+1)=f(x^2+x+1)$을 만족시키는 실계수 다항식을 모두 구하라.

· 근과계수사이와의 관계

$$P(x)=A(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$: $P(x)=0$의 근

$$=A(x^n-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)x^{n-1}+\cdots)$$

$$=Ax^n+Bx^{n-1}+\cdots$$

$$B=-A(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)$$

$$P(x)=(-1)^n A\,\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\alpha_n}\right)$$

$$=C\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\alpha_n}\right)$$

(참고)

$\cos\sqrt{x}=0.\quad \sqrt{x}=(n+\frac{1}{2})\pi \quad n=0,1,\cdots$

$x=(n+\frac{1}{2})^2\pi^2$

$\therefore \cos\sqrt{x}=A\left(1-\frac{x}{(\frac{1}{2}\pi)^2}\right)\left(1-\frac{x}{(\frac{3}{2}\pi)^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{(\frac{5}{2}\pi)^2}\right)\cdots \leftarrow P(x)$

$=A\left(1-\frac{4x}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x}{5^2\pi}\right)\cdots$

$\cos\sqrt{x}=1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}+\cdots$

두 식을 비교하면 $A=1$

$-\frac{1}{2}=-\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)$

$\therefore \frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$

$S=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$

$=\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)+\frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)$

$S=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}S$

$\frac{3}{4}S=\frac{\pi^2}{8}\qquad S=\frac{\pi^2}{6}$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

$$e^{ix}=1+\frac{ix}{1!}-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-i\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)+i\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)$$

$$=\cos x+i\sin x$$

$$\because \begin{cases}\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\\ \sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\end{cases}$$

· 삼각함수

주기성 $\quad f(x+a)=f(x)\ (a\neq 0)$ 일때 $\quad a$: 주기

예) $\sin(x+2\pi)=\sin x$

$\tan(x+\pi)=\tan x$

덧셈공식, 배각공식, 반각공식

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\cos 2x=\cos x\cos x-\sin x\sin x$$

$$=\cos^2 x-\sin^2 x$$

$= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$

$= 2\cos^2 x - 1$

$\cos 3x = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$

$= \cos x (2\cos^2 x - 1) - \sin x \cdot 2\sin x \cos x$

$= \cos x (2\cos^2 x - 1 - 2\sin^2 x)$

$= \cos x (4\cos^2 x - 3)$

$= 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\therefore P_2(\cos x) = \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$P_2(X) = 2X^2 - 1$ ..... 우함수

$P_3(\cos x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$P_3(X) = 4X^3 - 3X$ ... 기함수

$P_4(\cos x) = \cos 4x = \cdots$

$P_4(X) = \cdots$ ... 우함수

(체비세프) $P_n(X)$: Tschebychev 다항식

Ex 1. $a_1, a_2, \cdots, a_n$: 실수의 상수

$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{1}{2}\cos(a_2 + x) + \frac{1}{2^2}\cos(a_3 + x) + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n + x)$

$f(x_1) = f(x_2) = 0 \Rightarrow x_2 - x_1 = m\pi$, m : 정수.

(풀이) cos 합성공식에서

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \cos(a_k + x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} (\cos a_k \cos x - \sin a_k \sin x)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \cos a_k\right) \cos x - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin a_k}{2^{k-1}}\right) \sin x$$

$$= A \cos x + B \sin x$$

$f(x_1) = f(x_2) = 0$

$\Leftrightarrow A\cos x_1 + B\sin x_1 = 0$

$A\cos x_2 + B\sin x_2 = 0$

$A \neq 0$ $\cot x_1 = -\frac{B}{A} = \cot x_2$

$\therefore x_2 - x_1 = m\pi$, m : 정수

$A = 0$, $B \neq 0$ $\sin x_1 = 0 = \sin x_2$

$\therefore x_2 - x_1 = m\pi$, m : 정수.

$A = 0$, $B = 0$ $f(x) \equiv 0$

$f(-a_1) = \cos 0 + \frac{1}{2}\cos(a_2 - a_1) + \frac{1}{2^2}\cos(a_3 - a_1) + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n - a_1)$

$$f(-a_1) \geq 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} \cdots - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} > 0$$

$\therefore f(x) \neq 0$

따라서 이경우는 일어나지 않는다

Ex.2. $f(\theta) = 1 - a\cos\theta - b\sin\theta - A\cos 2\theta - B\sin 2\theta$

a, b, A, B : 실수의 상수

$f(\theta) \geq 0 \implies a^2+b^2 \leq 2$ and $A^2+B^2 \leq 1$

(풀이) $\sqrt{a^2+b^2} = r$ $\sqrt{A^2+B^2} = R$

$f(\theta) = 1 - r\left(\frac{a}{r}\cos\theta + \frac{b}{r}\sin\theta\right) - R\left(\frac{A}{R}\cos 2\theta + \frac{B}{R}\sin 2\theta\right)$

$\frac{a}{r} = \cos\alpha$, $\frac{A}{R} = \cos 2\beta$ 라 두면

$= 1 - r\cos(\theta - \alpha) - R\cos(2\beta - 2\theta)$

$= 1 - r\cos(\theta - \alpha) - R\cos 2(\theta - \beta)$

$f(\alpha + \frac{\pi}{4}) = 1 - r\cos\frac{\pi}{4} - R\cos 2(\alpha + \frac{\pi}{4} - \beta)$

$= 1 - \frac{r}{\sqrt{2}} - R\cos 2(\alpha - \beta + \frac{\pi}{4})$

$f(\alpha - \frac{\pi}{4}) = 1 - \frac{r}{\sqrt{2}} - R\cos 2(\alpha - \beta - \frac{\pi}{4})$

π 차이
: 둘중하나는 양수

(그런데 $\cos(x - \pi) = -\cos x$)

if $r > \sqrt{2}$, then $1 - \frac{r}{\sqrt{2}} < 0$

$\cos\left\{\left(2(\alpha-\beta) + \frac{\pi}{2}\right) - \pi\right\} = -\cos\left(2(\alpha-\beta) + \frac{\pi}{2}\right)$

$\cos\left\{2(\alpha-\beta) - \frac{\pi}{2}\right\} = -\cos\left(2(\alpha-\beta) + \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \cos\left(2(\alpha-\beta) - \frac{\pi}{2}\right)$ 나 $\cos 2(\alpha-\beta) + \frac{\pi}{2}$ 중 어느 하나는 영이상이다.

이때

$f(\alpha + \frac{\pi}{4}) < 0$ 또는 $f(\alpha - \frac{\pi}{4}) < 0$

$\therefore$ $r \leq \sqrt{2}$ $a^2+b^2 \leq 2$

$f(\beta) = 1 - r\cos(\beta - \alpha) - R$

$= 1 - R - r\cos(\beta - \alpha)$

$f(\beta + \pi) = 1 - r\cos(\beta - \alpha + \pi) - R$

$= 1 - R - r\cos(\beta - \alpha + \pi)$

π 차이
→ 둘중 하나는 양수(또는 0)

if $R > 1$ then $1 - R < 0$

$\therefore f(\beta) < 0$ or $f(\beta + \pi) < 0$

$\therefore R \leq 1$. $\therefore A^2 + B^2 \leq 1$

Ex 3. $f(\theta) = 1 - a\cos\theta - b\sin\theta - A\cos 2\theta - B\sin 2\theta - \alpha\cos 3\theta - \beta\sin 3\theta$

$a, b, A, B, \alpha, \beta$: 실수의 상수

$f(\theta) \geq 0 \implies a^2+b^2 \leq 2$ and $A^2+B^2 \leq 2$, $\alpha^2+\beta^2 \leq 1$

Ex 4. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \forall x \quad f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}$, $a > 0$

$\Rightarrow$ ⓐ f는 주기함수

ⓑ $a=1$ 일때 이와같은 함수의 예.

(풀이) ⓐ $f(x) - f(x)^2 \geq 0 \qquad \forall x, \ 0 \leq f(x) \leq 1$

그런데 $f(x) \geq \frac{1}{2}$

$g(x) = f(x) - \frac{1}{2} \qquad 0 \leq g(x) \leq \frac{1}{2}$

$$g(x+a) = \sqrt{g(x) + \tfrac{1}{2} - (g(x) + \tfrac{1}{2})^2}$$
$$= \sqrt{g(x) + \tfrac{1}{2} - g(x)^2 - g(x) - \tfrac{1}{4}}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{4} - g(x)^2}$$
$$g(x+a+a) = \sqrt{\tfrac{1}{4} - (\tfrac{1}{4} - g(x)^2)}$$
$$= \sqrt{g(x)^2}$$
$$= g(x)$$

$\therefore g(x+2a) = g(x)$: 주기함수

$\therefore f(x+2a) = f(x)$ 주기 $2a$ 인 주기함수.

ⓑ $g(x+2) = g(x) \qquad (0 \leq g(x) \leq \frac{1}{2})$

예.1 $g(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sin \pi(x)$

$f(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sin \pi x$

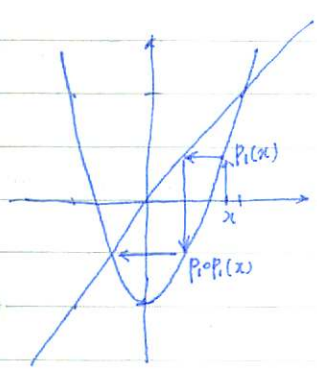
예 2. $g(x) = \frac{1}{2}\left|\sin \frac{\pi x}{2}\right|$

$f(x) = \frac{1}{2}\left|\sin \frac{\pi x}{2}\right| + \frac{1}{2}$

Ex 5. $P_1(x) = x^2 - 2$. $\quad P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x)) \quad j = 2, 3, \cdots$

$P_n(x) = x$ 의 근은 모두 실근이고 서로 다르다.

$x^2 - x - 2$
$= (x+1)(x-2) > 0$
(on $|x| > 2$)



(풀이) $|x| > 2$ 라면 $\quad P_1(x) > x$

$P_1(P_1(x)) > P_1(x) > x$

$\vdots$

$P_n(x) > x \qquad \therefore$ 근이 없다

$x = 2\cos t$ 일때 ($0 \leq t \leq \pi$) $\quad [-2, 2]$ 가 전구간

$$P_1(x) = P_1(2\cdot\cos t) = 2^2\cos^2 t - 2 = 4\cos^2 t - 2$$
$$= 2(2\cos^2 t - 1) = 2\cos 2t$$
$$P_2(x) = P_1(2\cos 2t) = 2\cos 2^2 t$$
$$\vdots$$
$$P_n(x) = 2\cos(2^n t)$$

구하는 근 : $\cos 2^n t = \cos t$

$2^n t = \pm t + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

$\therefore t = \dfrac{2k\pi}{2^n-1}$ 와 $\dfrac{2k\pi}{2^n+1}$

$k=0,1,\cdots,2^{n-1}-1$ $\quad$ $k=1,2,\cdots,2^{n-1}$

$$\therefore \begin{cases} x = 2\cos\dfrac{2k\pi}{2^n-1} & k=0,1,\cdots,2^{n-1}-1 \\ x = 2\cos\dfrac{2k\pi}{2^n+1} & k=1,2,\cdots,2^{n-1} \end{cases}$$

$P_n(x)$의 차수는 2^n차인데 여기 근이 $2^{n-1}+2^{n-1}=2^n$ 개 나왔으니 다른 근이 없다

Ex 6. $c,\ c^2+c,\ (c^2+c)^2+c,\ ((c^2+c)^2+c)^2+c,\ \cdots \to \infty$: if $c<-2,\ c>\frac{1}{4}$

$\not\to \infty$ if $-2 \le c \le \frac{1}{4}$

□ 함수.

① 유리수의 조밀성

② 연속 $\quad f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$

③ 단조증가, 감소

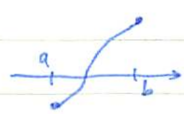
④ 단사함수 : 일대일함수

$f(X)$: 함수 f의 치역 $=\{y \mid y=f(x),\ x\in X\}$

전사함수

$f: X \to Y$ 전사 $\iff f(X)=Y$

⑤ 중간값정리.



⑥ $|f(x)| \le M \quad \exists\ \forall x$. 일때 ($M$은 상수) $\quad f(x)$: 유계함수 (bounded ft.)

Ex 1. $f_n(z) = 1 + \dfrac{z}{4} + \dfrac{z^2}{4^2} + \cdots + \dfrac{z^n}{4^n}$ 는

$|z| \le 1$ 에서 $\quad$ 1-1 함수이다.

(풀이) $f_n(z_1) - f_n(z_2) = \dfrac{z_1-z_2}{4} + \dfrac{z_1^2-z_2^2}{4^2} + \cdots + \dfrac{z_1^n-z_2^n}{4^n}$

$= (z_1-z_2)\left[\dfrac{1}{4} + \dfrac{z_1+z_2}{4^2} + \dfrac{z_1^2+z_1z_2+z_2^2}{4^3} + \cdots + \dfrac{z_1^{n-1}+z_1^{n-2}z_2+\cdots+z_2^{n-1}}{4^n}\right]$

$|a+b+c| \ge |a|-|b|-|c|$

$|f_n(z_1)-f_n(z_2)|$

$\ge |z_1-z_2|\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{|z_1+z_2|}{4^2} - \dfrac{|z_1^2+z_1z_2+z_2^2|}{4^3} - \cdots - \dfrac{|z_1^{n-1}+z_1^{n-2}z_2+\cdots+z_2^{n-1}|}{4^n}\right)$

$\ge |z_1-z_2|\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{4^2} - \dfrac{3}{4^3} - \cdots - \dfrac{n}{4^n}\right)$

$\ge |z_1-z_2|\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{4^2} - \cdots - \dfrac{n}{4^n} - \cdots\right)$

그런데 $S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \cdots$

$\frac{1}{4}S = \frac{1}{4^2} + \frac{2}{4^3} + \cdots$

$\therefore \frac{3}{4}S = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$

$S = \frac{4}{9}$

$\geq |z_1 - z_2| \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{9}\right)$

$= |z_1 - z_2| \frac{1}{18}$

$\therefore z_1 \neq z_2 \Rightarrow |z_1 - z_2| > 0 \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| > 0 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$

함수방정식 Ex 2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $f(1) = 1$. $f(a+b) = f(a) + f(b)$

1) $f(x)$가 연속 $\Rightarrow f(x) = x$

2) f: 단조증가 $\Rightarrow f(x) = x$

3) $f(x) f(\frac{1}{x}) = 1 \quad (x \neq 0) \Rightarrow f(x) = x$

(풀이) $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \quad \therefore f(0) = 0$

$0 = f(a-a) = f(a) + f(-a) \quad \therefore f(-a) = -f(a)$

$f(a+a) = f(a) + f(a) = 2f(a) \cdots \therefore f(na) = nf(a) \quad n \in \mathbb{N}$

$1 = f(1) = f(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}) = nf(\frac{1}{n}) \quad \therefore f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}.$

$f(\frac{m}{n}) = mf(\frac{1}{n}) = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n} \quad \therefore f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n}$

$q \in \mathbb{Q}$ 일때 $f(q) = q$.

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $q_n \in \mathbb{Q}$ 로서 $q_n \to x$ 라 하자. i.e. $\lim_{n\to\infty} q_n = x$

$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} q_n) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} q_n = x$

2) $q_n, r_n \in \mathbb{Q}$ 로서

$q_n \nearrow x$ 수열 q_n이 단조증가하여 x에 수렴.

$q_n \nearrow x \swarrow r_n$ 라 하자

$q_n = f(q_n) \leq f(x) \leq f(r_n) \leq r_n$

$n \to \infty \quad f(x) \to x \quad (\because \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = f(x))$

$\therefore f(x) = x$

3) $f(a) = f(b) \Rightarrow 0 = f(a) - f(b) = f(a) + f(-b) = f(a-b)$

$f(a+b) = f(a) + f(b)$

$f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{f(x)}$

$\Rightarrow f(a^2) = f(a)^2$

$\to f$: 단조증가

(주어진 명제 $x \neq 0 \Rightarrow f(x) f(\frac{1}{x}) = 1 \Rightarrow f(x) \neq 0$)

대우 $\therefore f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

즉 $f(a-b) = 0 \Rightarrow \therefore a - b = 0 \quad a = b$

$\therefore f$는 일대일함수이다

$a^2 \neq a$ 라하면 $\Rightarrow \frac{1}{f(a) - f(a^2)} = \frac{1}{f(a-a^2)} = f\left(\frac{1}{a(1-a)}\right)$

$\frac{1}{f(a)-f(a^2)}$ $= f\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{1-a}\right)$

$= f\left(\frac{1}{a}\right)+f\left(\frac{1}{1-a}\right)$

$= \frac{1}{f(a)} + \frac{1}{f(1-a)}$

$= \frac{1}{f(a)} + \frac{1}{1-f(a)}$

$= \frac{1}{f(a)-f(a)^2}$

$\therefore f(a)-f(a^2) = f(a)-f(a)^2$

$x>0,\ f(x)>0$ $\Leftrightarrow$ $\therefore f(a^2) = f(a)^2$

$a<b \Rightarrow b-a = x^2 > 0$ x : 어떤수

$\Rightarrow f(b)-f(a) = f(b-a) = f(x^2) = f(x)^2 > 0$

$\Rightarrow f(a) < f(b)$

$\therefore f$는 단조증가

2)에 의해서 $f(x)=x$

Ex 3. $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 연속. $\exists x,\ f(x)\neq 0$.

$f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(x)f(y)$

$\rightarrow f(x)=?$

(생각)

$f(\sqrt{x+y}) = f(\sqrt{x})f(\sqrt{y})$

: $f(\sqrt{x}) = a^x$

$f(x) = a^{x^2}$

(풀이) $\exists y_0,\ f(y_0)\neq 0$인 y_0 존재.

$f(\sqrt{x^2+y_0^2}) = f(x)f(y_0)$

$= f(-x)f(y_0)$ $\therefore f(x)=f(-x)$

$f(x) = f\left(\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\right) = f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \left\{f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right\}^2 \geq 0$

$\exists x,\ f(x)\neq 0$ 이므로 $f(x)=0$ 일수 없다

$g(x) = \log f(\sqrt{x})$

$g(x+y) = \log f(\sqrt{x+y}) = \log f(\sqrt{x}) + \log f(\sqrt{x})$

$= g(x)+g(y)$

g가 연속이므로 $g(x) = kx = g(1)x$

$\log f(\sqrt{x}) = g(1)x = x\log f(1)$

$f(\sqrt{x}) = e^{x\log f(1)}$

$= f(1)^x$

$\therefore f(x) = f(1)^{x^2}\ (x\geq 0)$ $f(-x)=f(x)=f(1)^{x^2}$

$\therefore f(x) = f(1)^{x^2}$

Ex.4. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)g(y) \quad \ni \forall x, y$

$\exists x,\ f(x) \neq 0. \qquad |f(x)| \leq 1 \ \ni \forall x.$

$\longrightarrow \quad |g(y)| \leq 1 \quad \ni \forall y.$

$|f(x)|$의 최소상계 $= M$

풀이) ① $|f(x)| \leq a \ (\ni \forall x)$ 가 되는 최소의 a를 M 라하자.

i.e. $|f(x)| \leq M$ 이고

$m < M$ 이면 $\exists x, |f(x)| > m$ ······ ※

$|g(y_0)| > 1 \quad \exists y_0$ 라 하자.

$2|f(x)||g(y_0)| < |f(x+y_0)| + |f(x-y_0)| \leq 2M$

$$|f(x)| < \frac{M}{|g(y_0)|} < M$$

이것은 M의 최소성에 모순된다 (∵※에 의해)

∴ $|g(y_0)| > 1 \quad \ni \exists x$ 는 거짓

∴ $\forall x, \quad |g(x)| \leq 1$

② $f(a) \neq 0$ 인 a가 존재

$x = a + ny \qquad n \in \mathbb{N}$

$f(a+(n+1)y) + f(a+(n-1)y) - 2f(a+ny)g(y) = 0$

$f_{n+1} = f(a+(n+1)y)$ 라 하고 $g(y) = g$ 라 두면

$f_{n+1} + f_{n-1} - 2f_n g = 0$

$f_{n+1} = 2g f_n - f_{n-1}$: 점화식

$$\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2g \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2g \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2g \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}$$

(※ 행렬의 n승. — 고유치, 고유벡터)

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 인 λ, a, b를 찾자

단 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0-\lambda & 1- \\ -1 & 2g-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이려면 계수행렬 역행렬이 존재해야 한다

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2g-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda(2g-\lambda)+1=0$$

$$\lambda^2 - 2g\lambda + 1 = 0 \qquad \lambda = g \pm \sqrt{g^2-1}$$

고유치 ······ $\lambda_1 = g + \sqrt{g^2-1}$ $\qquad \lambda_2 = g - \sqrt{g^2-1}$

고유벡터 ······ $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ··· 그때 만족하는 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

※ $\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$: 1차결합 $\because \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$

이까지 하면

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2g \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \lambda_1^2 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

이 답을 쉽게 알 수 있다.

$$\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2g \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2g \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \lambda_1^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \beta \lambda_2^n \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

바로 특성방정식 풀면
행렬 과정이 없어도 된다.

$$\therefore f_{n+1} = \alpha \lambda_1^n b_1 + \beta \lambda_2^n b_2$$
$$= A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$$

$\exists y,\ g = g(y) > 1$ 라면

$\lambda_1 > 1$ $\qquad A \neq 0$ 이라면 f_{n+1}이 유계라는 것에 모순 $\therefore A = 0$

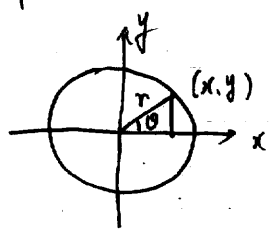
$g = g(y) < -1$ 라면

$\lambda_2 < -1.$ $\qquad B \neq 0$ 이라면 f_{n+1} 이 유계라는 것에 모순 $\Rightarrow B = 0$

$$\therefore \quad -1 \leq g(y) \leq 1$$

삼각함수.

· 삼각함수



$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

피타고라스정리 $\Rightarrow$ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$1 + \cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta$

사인법칙 : 삼각형 ABC 에서

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

R 외접원 반지름.

코사인 제2법칙 : 삼각형 ABC에서

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

덧셈 정리

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

넓이 $\triangle ABC$

$= \frac{1}{2}ah$ $\qquad s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

$= \frac{1}{2}ab\sin C$

$= rs = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c) = \sqrt{r r_a r_b r_c}$

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$: Heron 의 공식

$= \frac{1}{2}\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{b} - |\vec{a}||\vec{b}|}$ $\qquad \vec{a} = \overrightarrow{AB} \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$

$= \frac{abc}{4R}$

$= 2R^2\sin A\sin B\sin C$

· 배각 & 반각 공식

$\sin 2A = 2\sin A\cos A$ $\qquad \sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ $\qquad \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

$= 2\cos^2 A - 1$

$= 1 - 2\sin^2 A$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

· 합 ⇄ 곱

$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}\left(\sin(A+B) + \sin(A-B)\right)$$
$$\cos A\sin B = \frac{1}{2}\left(\sin(A+B) - \sin(A-B)\right)$$
$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}\left(\cos(A+B) + \cos(A-B)\right)$$
$$\sin A\sin B = -\frac{1}{2}\left(\cos(A+B) - \cos(A-B)\right)$$
$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

Ex. 1. (1966. IMO) n이 자연수일때

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x$$

(풀이) ① <수학적 귀납법>

$n=1$: $$\cot x - \cot 2x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x}$$
$$= \frac{2\cos^2 x}{\sin 2x} - \frac{2\cos^2 x - 1}{\sin 2x}$$
$$= \frac{1}{\sin 2x}$$

n일때 성립한다고 가정하자.

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} + \frac{1}{\sin 2^{n+1} x}$$
$$= \cot x - \cot 2^n x + \frac{1}{\sin 2^{n+1} x}$$
$$= \cot x - \cot 2^n x + \frac{1}{\sin 2^{n+1} x}$$
$$= \cot x - \frac{\cos 2^n x}{\sin 2^n x} + \frac{1}{\sin 2^{n+1} x}$$
$$= \cot x - \frac{2\cos^2 2^n x - 1}{\sin 2^{n+1} x}$$
$$= \cot x - \frac{\cos 2^{n+1} x}{\sin 2^{n+1} x}$$
$$= \cot x - \cot 2^{n+1} x$$ ⇒ $n+1$일때도 성립

$\therefore \forall n \in \mathbb{N}$에서 성립.

② $\cot 2^k x - \cot 2^{k+1} x$

$= \dfrac{\cos 2^k x}{\sin 2^k x} - \dfrac{\cos 2^{k+1} x}{\sin 2^{k+1} x}$

$= \dfrac{2\cos^2 2^k x - \cos 2^{k+1} x}{\sin 2^{k+1} x}$

$= \dfrac{2\cos^2 2^k x - 2\cos^2 2^k x + 1}{\sin 2^{k+1} x}$

$= \dfrac{1}{\sin 2^{k+1} x}$

$\therefore \dfrac{1}{\sin 2x} + \dfrac{1}{\sin 4x} + \cdots + \dfrac{1}{\sin 2^n x}$

$= (-\cot 2x + \cot x) + (-\cot 4x + \cot 2x) + \cdots + (-\cot 2^n x + \cot 2^{n-1} x)$

$= \cot x - \cot 2^n x$

Ex 2. $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ 일때

$\tan\alpha \tan\beta \tan\gamma = \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma$

$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

(풀이) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$\tan\gamma = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta - 1}$

$\therefore \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha \tan\beta \tan\gamma$ //

Ex 3. $A = \cos\frac{\pi}{7} \cos\frac{2\pi}{7} \cos\frac{4\pi}{7}$ 를 구하라.

(풀이) $A \sin\frac{\pi}{7} = \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$

$= \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$

$= \frac{1}{8}\sin\frac{8}{7}\pi$

$= -\frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{7}$

$\therefore A = -\frac{1}{8}$ $\quad (\because \sin\frac{\pi}{7} \neq 0)$

Ex 4. $\sin 18^\circ \cos 36^\circ$ 를 구하라.

(풀이) $A = \sin 18^\circ \cos 36^\circ$

$(\cos 18^\circ)A = \frac{1}{2}\sin 36^\circ \cos 36^\circ = \frac{1}{4}\sin 72 = \frac{1}{4}\cos 18^\circ$

$\therefore A = \frac{1}{4}$ $\quad \therefore \sin 18^\circ \cos 36^\circ = \frac{1}{4}$

Ex 5. (1963. IMO)

$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$ 임을 보여라.

(풀이) sol.1. $I = \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2}{7}\pi + \cos\frac{3}{7}\pi$ 라 두자

$I\sin\frac{\pi}{7}$

$= \frac{1}{2}\sin\frac{2}{7}\pi - \frac{1}{2}\left(\sin\frac{3}{7}\pi - \sin\frac{\pi}{7}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7}\right)$

$= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{7}$

$\therefore I = \frac{1}{2}$

sol. 2. $I = \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2}{7}\pi + \cos\frac{3}{7}\pi$

$= \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3}{7}\pi + \cos\frac{5}{7}\pi$

$2I = \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} - \cos\frac{4}{7}\pi + \cos\frac{5}{7}\pi - \cos\frac{6}{7}\pi.$

let $\alpha = \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$

$\Rightarrow \alpha^7 = -1$

$-1 + \alpha - \alpha^2 + \alpha^3 - \alpha^4 + \alpha^5 - \alpha^6 = -\frac{(1+\alpha^7)}{1+\alpha} = \frac{0}{1+\alpha} = 0$

$\therefore \alpha - \alpha^2 + \alpha^3 - \alpha^4 + \alpha^5 - \alpha^6 = 1$

좌우변 실수부비교

$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2}{7}\pi + \cos\frac{3}{7}\pi - \cos\frac{4}{7}\pi + \cos\frac{5}{7}\pi - \cos\frac{6}{7}\pi = 1$

$2I = 1 \quad \therefore I = \frac{1}{2}$

Ex 5-1. $\cos\frac{\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} + \cdots + \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}$

Hint: $\sin\frac{\pi}{14}$을 곱해보라

Ex 5-2. $\sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{2}{7}\pi + \sin\frac{3}{7}\pi =$ ← $\sin\frac{\pi}{7}, \cos\frac{\pi}{7}$로 나타내어라

Ex 6. $I = \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{3} = 2\sin\frac{n\pi}{6}\sin\frac{(n+1)\pi}{6}$

공차가 되는 각의 반의 sin을 곱하라

(풀이) $I\sin\frac{\pi}{6} = \frac{I}{2}$

$= \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}$

$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2k+1}{6}\pi - \cos\frac{2k-1}{6}\pi\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2n+1}{6}\pi - \cos\frac{\pi}{6}\right)$

$= \sin\frac{n+1}{6}\pi\ \sin\frac{n\pi}{6}$

$\therefore I = 2\sin\frac{n\pi}{6}\sin\frac{n+1}{6}\pi$

Ex 7. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(\alpha+\beta)$

$$\Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} = \frac{1}{3} \qquad (\alpha+\beta \neq k\pi)$$

(풀이) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(\alpha+\beta)$

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2^2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\therefore \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{-\left\{\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right\}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$= \frac{+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{3\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{1}{3}$$

부등식

I. 산술 평균 / 기하 〃 / 조화 〃 / 제곱평균 제곱근 } 부등식

II. 코시-슈발쯔 / 헬더 } 부등식

III. 젠센 부등식 { 가중치 멱평균 부등식 ⋮

IV. 기타 부등식

$x_i > 0$

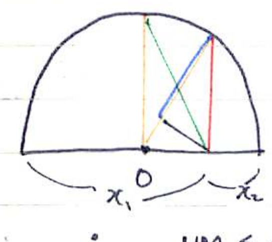
- A.M. (arithemetic Mean) $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
- G.M. (geometric Mean) $= \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$
- HM (harmonic Mean) $= \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$
- R.M. (root-mean-square Mean) $= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

$$HM \le GM \le AM \le RM$$

등호조건 $\Leftrightarrow$ $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

AM≥GM

(증명) i) $n=2$



— : AM $\frac{x_1+x_2}{2}$
— : GM $\sqrt{x_1x_2}$
— : HM $\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}$
— : RM $\sqrt{\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}$

$\therefore$ $HM \le GM \le AM \le RM$

- GM≤AM의 증명

$x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n$ 라 가정하자

$G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$

$x_n \le G \le x_1$

$0 \le \frac{1}{G}(x_1 - G)(G - x_n)$

$= x_1 + x_n - \left(G + \frac{x_1x_n}{G}\right)$

$x_1 + x_n \ge G + \frac{x_1x_n}{G} = 2G$

$\frac{x_1+x_n}{2} \ge G$

(n−1)인 경우 성립, n 일때는?

$$\frac{x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}+\frac{x_1x_n}{G}}{n-1} \ge \sqrt[n-1]{x_2x_3\cdots x_{n-1}\frac{x_1x_n}{G}} = G$$

양변에 G를 더하면

$$x_1+x_2+\cdots+x_n \geq x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}+\left(\frac{x_n x_1}{G}+G\right) \geq (n-1)G+G=nG$$

$$\therefore \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

$AM \geq GM \implies GM \geq HM$

Ex 1. $S_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$

(1) $n(n+1)^{\frac{1}{n}} < n+S_n \qquad (n>1)$

(2) $(n-1)n^{\frac{-1}{n-1}} < n-S_n \qquad (n>2)$

(풀이) (1) $n+S_n$

$$=(1+1+1+\cdots+1)+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$
$$=2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{n+1}{n}$$
$$\geq n\cdot\sqrt[n]{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}} \qquad (AM\geq GM)$$
$$=n(n+1)^{\frac{1}{n}}$$

(2) $n-S_n$

$$=(1+1+1+\cdots+1)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}$$
$$\geq (n-1)\sqrt[n-1]{\frac{1}{n}} \qquad (AM\geq GM)$$
$$=(n-1)\,n^{-\frac{1}{n-1}}$$

Ex 2. $n\in\mathbb{N}$.

$$n^{\frac{1}{n}}+n^{\frac{1}{n+1}}+\cdots+n^{\frac{1}{2n-1}} \geq n\sqrt[n]{2}$$

(풀이)
$$\frac{n^{\frac{1}{n}+1}+n^{\frac{1}{n+1}+1}+\cdots+n^{\frac{1}{2n-1}+1}}{n} \geq \sqrt[n]{n^{\frac{n+1}{n}+\frac{n+2}{n+1}+\cdots+\frac{2n}{2n-1}}} \geq n\sqrt[n]{2}\cdot n\cdot\frac{1}{n}$$

Ex 3. $-1<x,y,z<1$

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}+\frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geq 2$$

등호는 $x=y=z=0$ 일때

(풀이) $-1<x_i<1$, $n_i<0$ 라 두면

$$\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{n_i}+\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{n_i}$$
$$\geq 2\sqrt{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i^2)^{n_i}} \geq 2 \qquad (\text{등호 } x_i=0 \ \forall i)$$

$n_i=-1$, $n=3$ 인 경우가 위 문제이니 증명되었음.

Ex 4. ① $a_i \geq 0 \quad i=1,\cdots,n+1$

$(a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n+1})(a_1^{-n}+a_2^{-n}+\cdots+a_{n+1}^{-n}) \geq a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}$

Hint: $S=a_1^{-n}+a_2^{-n}+\cdots+a_{n+1}^{-n}$

$=\frac{(n+1)}{n}(S-a_1^{-n}+S-a_2^{-n}+\cdots+S-a_{n+1}^{-n})$

② $(\sqrt{2}-1)(\sqrt[3]{6}-\sqrt{2})\cdots(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}) < \frac{n!}{(n+1)^n}$

Ⅱ 코시·슈발츠 부등식 , 헬더 부등식

◦ 코시 슈발츠 부등식

$a_i, b_i \in \mathbb{R}$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

◦ 헬더부등식 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$

(켤레수)

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$\vec{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ $\quad \vec{b}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 로 하면

$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$

Ex 5. 실수 $a_1, a_2, \cdots, a_n \ (n>1)$ 이

$A+\sum_{i=1}^{n} a_i^2 < \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$

을 만족한다고 하자. 이때

$1 \leq i < j \leq n$ 이면 $\quad A < 2a_i a_j$

임을 증명하라

Ex 6. 임의의 양수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 에서 서로 다른 k 개를 골라

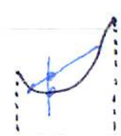
곱한 것들의 합을 S_k 라 한다

$k=1,2,\cdots,n$ 에 대해

부등식 $\quad S_k S_{n-k} \geq \binom{n}{k}^2 a_1 a_2 \cdots a_n$

이 성립함을 증명하여라.

Ⅲ. 젠센부등식 (Jensen inequality)



$f: I \to \mathbb{R}$: 연속 on I

$\forall\, x_1, x_2 \in I \quad x_1 < x_2$

$\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_1+\lambda_2=1$

$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)$

$\Rightarrow$ f가 (아래로) 볼록하다.

등호만 성립하는 함수 : 선형함수

*부등호가 반대 ⇒ 위로 볼록

* 볼록함수 — '아래로 볼록한 함수' 를 뜻함

1) 어떤 점에서 접선을 그으면 다른 값에서는 항상 접선위에 있다

(예외적으로 선형함수에서는 접선과 일치)

* 연속함수

1. f는 반드시 최대최소를 갖는다 (단, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$)

2. $f(a) < f(b)$ 이고

$f(a) < k < f(b)$ 에 대해 $\exists c \in (a,b)$ (또는 (b,a))

$f(c) = k$

함수의 갈래

$\mathcal{F}[a,b]$

$\cup$

$\mathcal{B}[a,b]$: 유계함수

$\cup$

$\mathcal{I}[a,b]$: 적분가능함수

$\cup$

$C[a,b]$: 연속

$\cup$

$D \to \mathcal{D}[a,b]$: 미분가능

$\cup$

(C^1) $C'[a,b]$: 도함수연속

$\cup$

(C^2) $C''[a,b]$: 2계도함수연속

$\cup$

(C^3) C'''

⋮

C^∞

|

$\mathcal{A}$. 멱급수로 전개할수있는 함수

=Analytic ft. 해석 함수

미분가능성을 포기하면 등호조건을 말하기 어렵다.

· 볼록함수 성질

(I) $f: I \to \mathbb{R}$ 볼록 : f의 최대값은 그 구간의 끝점에서 갖는다.

(I: 폐구간)

(II) f가 미분가능하면 $f'(x)$가 증가함수 ⟺ f가 볼록함수

f가 두번 미분가능하면 $f''(x) > 0$

· 볼록함수의 예

(1) $f(x) = -\log x$, $x > 0$

$f'(x) = -\frac{1}{x}$

$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ $(x > 0)$

(2) $f(x) = x^a$, $a > 1$

$f''(x) > 0$

(3) $f(x) = \log\left(\frac{1}{\sin x}\right) = -\log \sin x$, $0 < x < \pi$

(4) $f(x) = \log\left(\frac{1}{\cos x}\right) = -\log \cos x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

(5) $f(x) = \log\left(\frac{1}{\tan x}\right) = -\log \tan x$, $0 < x < \frac{\pi}{4}$

(6) $f(x) = x \log x$, $x > 0$

· 젠센 부등식

f : 2회 연속 미분가능 , 볼록함수 ($f''(x) > 0$)

$\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geq 0$ $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

$$f\left(\sum \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

등호는 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 일때만 성립 (미분가능할때만)

예제. $f(x) = -\log x$ $I = (0, \infty)$

$a_1, a_2, \cdots, a_n \in I$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$$

$$f\left(\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\right) \leq \frac{1}{n}\left(f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n)\right)$$

(∵ Jensen 부등식 ← f : 볼록함수)

젠센 부등식

⇒ 산술기하평균

$$-\log \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq -\frac{1}{n} \log a_1 a_2 \cdots a_n$$

$$\log \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \frac{1}{n} \log a_1 a_2 \cdots a_n$$

$\log x$ 는 증가함수 이므로

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

등호는 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

예제. ($t < s$ $f(x) = x^{\frac{s}{t}}$ $I = (0, \infty)$)

⇒ f는 볼록함수.

$x_i \in I$. $\lambda_i \geq 0$ $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

$$M(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^t\right)^{\frac{1}{t}} \qquad t \neq 0.$$

Claim: $t < s \Rightarrow M(t) \leq M(s)$

i.e. $M(t)$는 증가함수

(증명)

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^t\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i^t)$$

젠센 부등식

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^t\right)^{\frac{s}{t}} \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^s$$

⇒ 가중치 멱평균 부등식

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^t\right)^{\frac{1}{t}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^s\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$M(t) \leq M(s)$$

등호는 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

- 가중치 멱평균 부등식 (weighted power mean inequality)

$x_i > 0$. $\lambda_i \geq 0$. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

$$M(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^t\right)^{\frac{1}{t}} \text{ 일때}$$

단 $M(0) = \lim_{t \to 0} M(t) = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}$

$t < s \Rightarrow M(t) \leq M(s)$

단 등호 $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

⊙ $M(t)$의 성질

(1) $t < s \Rightarrow M(t) \leq M(s)$ 즉 증가함수

2^{12}

(2) $M(0) \overset{\text{정의}}{=} \lim_{t\to 0} M(t)$

$= x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}$ (by 로피탈정리)

(3) $M(0) \le M(t) \quad t \ge 0$

(4) $M(t)$ 는 연속함수

(5) $\lim_{t\to\infty} M(t) = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

$\lim_{t\to -\infty} M(t) = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

Remark. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ $\quad x_i > 0$

$M(2) = \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ = R.M (root-mean-square)

$M(1) = \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)$ = A.M (arithemetic mean)

멱
가중치산술평균
⟹ 헬더부등식

$M(0) = (x_1 x_2 x_3 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$ = G.M (geometric mean)

$M(-1) = \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$ = H.M (harmonic mean)

$M(-1) \le M(0) \le M(1) \le M(2)$

등호 $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

Ex 7. $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$

$S_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{y_i^{2k}}$

$\exists k, \ S_k = 1$

$\Longrightarrow S_k = 1, \ k = 1, 2, \cdots, n$

Ex 8. $x, y, z, \ a, b, c > 0$

$\frac{x^{\lambda+1}}{a^\lambda} + \frac{y^{\lambda+1}}{b^\lambda} + \frac{z^{\lambda+1}}{c^\lambda} \ge \frac{(x+y+z)^{\lambda+1}}{(a+b+c)^\lambda}$

(풀이) $\left(\frac{a\left(\frac{x}{a}\right)^{\lambda+1} + b\left(\frac{y}{b}\right)^{\lambda+1} + c\left(\frac{z}{c}\right)^{\lambda+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{\lambda+1}}$

가중치 ~~산술~~ 멱평균 부등식

$\ge \frac{a}{a+b+c}\cdot\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b+c}\cdot\frac{y}{b} + \frac{c}{a+b+c}\cdot\frac{y}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c}$ //

등호조건 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

Ex 9. $\dfrac{x^{\lambda+1}}{y^{\lambda}} + \dfrac{y^{\lambda+1}}{z^{\lambda}} + \dfrac{z^{\lambda+1}}{x^{\lambda}} \geq x+y+z$

- 수열에서의 젠센의 부등식

$$t<s \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{t}\right)^{\frac{1}{t}} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{s}\right)^{\frac{1}{s}}$$

등호 $\Leftrightarrow$ x_i들 중 1개 빼고 모두 0일때.

- 민코우스키 부등식

$$\left[\sum(x_i+y_i)^t\right]^{\frac{1}{t}} \leq \left(\sum x_i^{t}\right)^{\frac{1}{t}} + \left(\sum y_i^{t}\right)^{\frac{1}{t}}$$

- 젠센 부등식의 증명

$\sum_{i=1}^{n} x_i^{t} = 1$ 로 가정해도 무리가 없다.
(1이 아니면 양변을 (그것)$^{\frac{1}{t}}$으로 나누면 된다)

$x_k^{t} \leq 1$

$x_k^{s} = (x_k^{t})^{\frac{s}{t}} \leq x_k^{t}$ $\left(\because \frac{s}{t}>1,\ x_k^{t}\leq 1\right)$

$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^{s}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^{t} = 1$

$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^{s}\right)^{\frac{1}{s}} \leq 1 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^{t}\right)^{\frac{1}{t}}$

q.e.d.

- Ex 10. $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_i-a_j)^2$$

$\Rightarrow n\cdot \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i - S \leq \sum_{i=1}^{n} a_i + S \leq n\cdot \max\{a_1, \cdots, a_n\}$

(증명) $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 으로 가정해도 이경우 무방하다

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} (a_i-a_j)^2$$

$$\leq \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^{n} (i-1)(a_i-a_1)^2$$

젠센부등식

$$\leq \frac{n-1}{n-1} \sum_{i=2}^{n} (a_i-a_1)^2 \leq \left\{\sum_{i=2}^{n} (a_i-a_1)\right\}^2$$

$S \leq \sum_{i=1}^{n} a_i - na_1$ $\therefore na_1 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i - S$

같은 방법으로

$$S^2 \le \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}(n-1)(a_n-a_j)^2$$
$$\le \frac{n-1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}(a_n-a_j)^2$$
$$\le \left\{\sum_{j=1}^{n-1}(a_n-a_j)\right\}^2$$

$$S \le na_n - \sum_{j=1}^{n} a_j$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i + S \le na_n \quad //$$

○ 재배열 부등식 (Rearrangement inequality)

$r_1 \le r_2 \le \cdots \le r_n$

$s_1 \le s_2 \le \cdots \le s_n$ 에서

$\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{pmatrix}$

$t_1, t_2, \cdots, t_n$은 $s_1, s_2, \cdots, s_n$의 임의의 순열

$$\sum_{i=1}^{n} r_i s_{n-i} \le \sum_{i=1}^{n} r_i t_i \le \sum_{i=1}^{n} r_i s_i$$

(증명) $k < m \Rightarrow t_k \ge t_m$

$(r_m - r_k)(t_k - t_m) \ge 0$

$r_m t_k + r_k t_m \ge r_m t_m + r_k t_k$

이런시행을 유한회하면 임의의 순열을 만들수있고, 그 크기는 커지지 않는다

ex 11. 서로다른 양의 정수 $a_1, \cdots, a_n$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}$$

서로다른 정수이기 때문

(풀이) $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$을 $\{a_k\}$의 순열이라 하자. $\therefore b_k \ge k$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2} \ge \sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k^2} \ge \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

재배열부등식

$\left(\because \begin{array}{l} b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n \\ \frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \cdots > \frac{1}{3} \end{array}\right)$

<대수적구조>

- 집합 G. 연산 $+$ 에서
  ① $a, b \in G \Rightarrow a+b \in G$ (닫힘성)
  ② $(a+b)+c = a+(b+c)$ (결합법칙)
  ③ $a+0 = 0+a = a \quad \exists 0 \in G$. (항등원)
  ④ $a+b = b+a = 0$, $\exists b \in G$ (역원)

  * 역원이 있다면 유일

$+$: 어떤 임의의 일반적인 연산

$\begin{cases} a+b=b+a=0 \\ a+b'=b'+a=0 \end{cases}$ 라면

$b = b+0 = b+(a+b') = (b+a)+b' = b'$

이와 같은 $(G,+)$ 를 군(君羊, group)

군 + 교환법칙성립 : 가환군

예) 군. ① 실수전체, $+$
② 정수, $+$
③ 복소수, $+$
④ $m \times n$ 행렬, $+$

- 집합 $F, +, \times$
  ① $F+$: 군 (가환)
  ② $F_\times$: (0을 제외하고) 역원, 가환, 닫힘 항등원, 결합법칙
  ③ 분배법칙 성립

$\Longrightarrow$ $F, + \times$ 를 체 (Field, 体) 라 한다.

ex) ① 실수 전체
② $\mathbb{C}$ $+\times$
③ $\mathbb{Q}$ $+\times$
} 무한체 (infinite field)

④ p : prime, $\mathbb{F}_p = \{1, 2, 3, \cdots, p-1, 0\}$
$+$: 더한후 p로 나눈나머지
$\times$: 곱한후 p로 나눈 나머지
} 유한체 (finite field)

- 집합 V, $F_{+\times}$ field (체)
  V_+ : 가환군
  $a \in F$, $v \in V \Rightarrow av \in V$
  ① $1 \cdot v = v$
  ② $(a+b)v = av + bv$
  ③ $a(u+v) = au + av$

④ $(ab)v = a(bv)$

이때 V를 (F 위에서의) 벡터공간 (vector space)

ex) ① $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ → 2차원 vector space

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$

$a(x,y) = (ax, ay)$

② $\mathbb{R}^3$

③ $\mathbb{R}^n$ → n차원 (Euclidian) vector space

④ X : 집합.

$\mathbb{R}$대신 임의의 체를 써도 V는 vector space 이다

$V = \{ f \mid f : X \to \mathbb{R} \}$

$$\begin{cases} (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (af)(x) = a f(x) \end{cases}$$

∘ W, V : 벡터공간

$W \subset V$ 일때 W : V의 부분(벡터)공간 (subspace)

∘ H, G : 군

$H \subset G$ 일때 H : G의 부분군 (subgroup)

∘ F', F : 체

$F' \subset F$ 일때 F' : F의 부분체 (subfield)

∘ $\sum_{i=0}^{k} c_i a_i$: 일차결합 (linear combination)

∘ $a_i \in F$ (체) $v_i \in V$ (벡터공간)

$\sum_{i=0}^{n} a_i v_i = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$: 일차결합

∘ V : 벡터공간, F : 체

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ 이

① $V = \{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \mid a_i \in F \}$

② $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0 \Rightarrow a_1, a_2, \ldots, a_n = 0$

(일차독립)

다른 표현 : $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n$

$\Rightarrow a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \cdots\ a_n = b_n$

을 만족할때

$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$을 basis (基, 기저) 라 한다.

· V 벡터공간 에서

$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, $\{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$ 이 basis 이면 $m=n$

이때 n을 V의 차원이라 한다 (dimension)

Remark : 기저가, 무한개의 원소로 이루어질수있다 (즉 차수 = ∞)

※ V(벡터공간) 에서

$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 이 일차독립이고, 최대 일차독립 이면

$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 은 기저(basis) 이다.

· $f : V \to W$ (V, W : 벡터공간) 차수가 같을때

$f(av) = af(v)$ $a \in F$ 체. 를 만족하는 f가 존재

⇒ V, W는 동형.

· $\mathbb{R}$ 실수전체

$\mathbb{Q}$ 유리수

$\mathbb{R}$은 $\mathbb{Q}$ 위에서 벡터공간이다. 차원?

참고) $\mathbb{R}$은 $\mathbb{R}$ 위에서 벡터공간이다. (차수=1)