대구과학고
엄상일

1장

1. (1965 Putnam)

양의 정수 n에 대하여 이변수함수

$$f(x,n)=\frac{\binom{n}{0}+\binom{n}{2}x+\binom{n}{4}x^2+\cdots}{\binom{n}{1}+\binom{n}{3}x+\binom{n}{5}x^2+\cdots}$$

이라 하자. $f(x,n+1)$을 $f(x,n)$과 x로 나타내라.

(※ $\binom{n}{k}={}_nC_k$ 는 서로 다른 n개에서 중복하지 않고 k개를 뽑는 조합의 수를 나타낸다. $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$을 이용하라.)

2. (1977 U.S.MO)

$0<p<q$이고 $a,b,c,d,e\in[p,q]$ 이면

$$(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)\le 25+6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

임을 증명하여라. 또한, 등호가 성립할 조건을 찾아라.

(※ $a\in[p,q]$ 라는 기호의 뜻은 $p\le a\le q$ 이다.)

대구과학고
엄상일

2장

1 ① (1959 IMO) $\frac{21n+4}{14n+3}$ 은 기약분수다. n은 자연수. $n \in \mathbb{N}$

② 41은 $25x+3y$를 나눈다 $(41 \mid 25x+3y)$

$\Leftrightarrow$ 41은 $31x+7y$를 나눈다. $(41 \mid 31x+7y)$

③ n^3+100이 $n+10$의 배수가 되는 가장 큰 양의 정수 n을 구하라.

④ a와 $b>2$는 자연수일때 2^a+1은 2^b-1로 안 나누어짐을 보이시오.

2. ① $10^k \mid n!$ 이 되는 최대 정수 k가 100이 되는 양의 정수 n을 찾으시오.

② $n = r_m p^m + r_{m-1} p^{m-1} + \cdots + r_0$ $\quad 0 \le r_i < p$ 를 n의 p진법 표현이라할때 $p^k \mid n!$ 이 되는 최대의 정수는

$$k = \frac{n-(r_m+r_{m-1}+\cdots+r_0)}{p-1}$$

임을 보여라. (p는 소수)

③ 360의 양의 약수의 합, 곱을 구하고 360과 서로소인 자연수의 합을 구하라.

3 ① $x^4+y^4=1992$를 만족하는 정수해가 없음을 보이시오

②

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 \\ \ldots & & & & & & \end{array}$$

왼쪽은 바로위 숫자와 그 양옆의 숫자들을 더해 얻은 피라미드이다. (없을때는 0으로 간주) 세번째행이후는 반드시 짝수가 포함됨을 보이시오

대구과학고
엄상일

3장

1. 원에 내접하는 사각형과 원 위에 한 점이 주어져 있다.
이 점에서 두 대변에 이르는 거리의 곱과 다른 두 변에 이르는 거리의 곱, 두 대각선에 이르는 거리의 곱은 모두 같다는 것을 보여라.

2. 삼각형 ABC의 변 AB, BC, CA 위에 (바깥쪽으로) 세 개의 닮은 이등변 삼각형 $\triangle AC_1B$, $\triangle BA_1C$, $\triangle CB_1A$ 을 만든다. ($\angle A_1$, $\angle B_1$, $\angle C_1$이 꼭지각)
이 때 세 직선 AA_1, BB_1, CC_1 이 한 점에서 만남을 보여라

1993年 1月 6日 제1주 2일 연습문제

1. ① 정수 n이 두 삼각수의 합일 때 즉

$$n=\frac{a^2+a}{2}+\frac{b^2+b}{2}$$

일 때 $4n+1=x^2+y^2$을 만족하는 정수 x, y를 a, b로 나타내어라.
반대로, $4n+1=x^2+y^2$이라면 n이 두 삼각수의 합으로 표현됨을 보여라.
(※ a가 정수일 때 $\frac{a^2+a}{2}$를 삼각수라 한다. 삼각수는 정수이다.)

② n명의 경기자 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ $(n>1)$이 각각 1번씩 서로 경기를 갖고 (즉 1명이 $n-1$번 경기를 갖는다.) 무승부는 없다고 한다.
w_r과 l_r은 각각 P_r 경기자가 이기고 진 경기의 횟수라고 할 때

$$\sum_{r=1}^{n} w_r^2=\sum_{r=1}^{n} l_r^2$$

이 성립함을 보여라.

(※ $\sum_{r=1}^{n} a_r = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$)

2. 실수 x, y, z, w에 대한 4원 연립방정식

$$\begin{cases} x+y+z=w \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{w} \end{cases}$$

의 모든 해를 찾으라.

5장

1. (잉여류. Euler 정리)

① $r \in \mathbb{Z}$, $d, k \in \mathbb{N}$ $\quad d \mid k \quad (r, d) = 1$
(i.e. r과 d는 서로소)

$$S = \{ r + td \mid t = 1, 2, \cdots, \tfrac{k}{d} \}$$

S안에 있는 수중 k와 서로 소인 원소의 갯수는

$\dfrac{\phi(k)}{\phi(d)}$ 임을 보여라

(주: $\phi(n) = |\{ x \in \mathbb{N} \mid 1 \le x \le n,\ \gcd(n, x) = 1 \}|$
= n보다 작고 n과 서로소인 자연수의 갯수)

② $(m, n) = 1$

$$\Rightarrow \quad m^{\phi(n)} + n^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}$$

③ $2^{1993} \mid 23^n - 1$ 인 가장 작은 자연수 n은?

④ 음이 아닌 임의의 정수 n에 대해

$$5 \nmid \sum_{k=0}^{n} 2^{3k} \binom{2n+1}{2k+1}$$

임을 보이시오.

2. (Arithmetic functions)

① $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 인 함수 Λ는 $\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & : n = p^k,\ k \ge 1,\ p \text{ 소수} \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases}$

로 정의 되었다. 다음을 보이시오.

(i) $\displaystyle\sum_{d \mid n} \Lambda(d) = \log n$

(ii) $\displaystyle\sum_{1 \le k \le n} \Lambda(k) \left[\frac{n}{k}\right] = \log n!$

정수론부분 page

6장

② $f: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 인 함수 f는

$$f(m,n) = \frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1)+m$$

으로 정의 되었다. f는 단사함수임을 보이시오.

③ (1988 IMO.4)
$\left\{x \,\middle|\, \sum_{k=1}^{90} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}\right\}$ 는 서로소인 十가의 합집합이고
(교집합이 없는)

그 구간의 길이의 합은 1988임을 보이시오.

3. 실수 a는 음이아닌 적당한 실수 $x_1, \cdots, x_7$에 대해
$$\sum_{k=1}^{7} kx_k = a, \quad \sum_{k=1}^{7} k^4 x_k = a^2, \quad \sum_{k=1}^{7} k^7 x_k = a^3$$ 이다.

이러한 실수 a를 모두 찾아라.

1993年 1月 6日 제 1주 제 2일 연습문제. 17장

1\. 1) 원 C에 예각 삼각형 ABC가 내접하고 있다. AB, BC, CA를 현으로 가지는 세 개의 열호(둘 중에 길이가 작은 호) $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$를 삼각형 안쪽으로 접을 때 이들이 삼각형의 수심에서 만남을 보여라.

2) 둔각 삼각형이라면 이 문제는 다음과 같이 된다.

"원 C와 합동이고 (반지름이 같고), 원 C와 일치하지는 않으며, A, B, C 중 두 점을 지나는 세 원은 △ABC의 수심에서 만난다."

이것을 보여라.

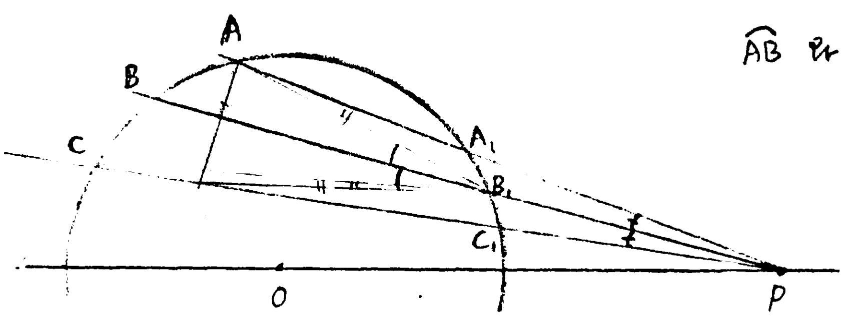
3). 위의 결과를 이용하여 다음을 증명하여라:

$\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$의 중점을 D, E, F라 할 때 육각형 ADBECFA의 넓이는 △ABC의 넓이의 두 배보다 크다.
거나 같다

2\. 아래 그림에서 P는 반원의 지름의 연장선상의 임의의 점이다.

직선 BP가 ∠APC를 이등분할 때 $\widehat{AB}$와 $\widehat{BC}$의 길이를 비교하여라.

(미분을 이용하지 말것)



(8장)

1993年 1月 7日 제1주 3일 연습문제

1. 모든 자연수는 다른 자연수들의 합으로 나타낼 수 있다. (예: $6=1+2+3$)
$a(n)$을 n을 1과 2의 합으로 나타낼 때 순서도 고려한 가지수라고 하고
$b(n)$을 n을 1보다 큰 자연수들의 합으로 나타낼 때 순서도 고려한 가지수
라고 하자. 가령 다음과 같이 $a(4)=5$, $b(6)=5$ 이다.

a 합	b 합
1+1+2	4+2
1+2+1	3+3
2+1+1	2+4
2+2	2+2+2
1+1+1+1	6

(a) a합과 b합 사이에 1:1 대응을 만듦으로써 임의의 n에 대해
$a(n)=b(n+2)$ 임을 보여라.

(b) $a(1)=1$, $a(2)=2$ 이고 $n>2$ 일 때 $a(n)=a(n-1)+a(n-2)$
임을 보여라.

2. ① S가 집합이고 $*$가 S 위에서 정의된 이항연산으로 다음 두 조건을
만족한다 하자.

$\forall x,y,z\in S$, $\quad x*x=x$

$\quad (x*y)*z=(y*z)*x$

이때 $x*y=y*x$ (즉, $*$가 교환법칙이 성립) 임을 보여라.

② $*$가 다음 두조건을 만족할 때 역시 $x*y=y*x$ 임을 보여라.

$\forall x,y\in S$, $\quad x*(x*y)=y$

$\quad (y*x)*x=y$

(※ $\forall x\in S$, ; S의 원소인 임의의 x에 대해서)

제 6기 겨울학교 제 1주 제 3일

9장

1. $\triangle ABC$ 에서 다음 부등식을 증명하여라.

$$1 < \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}$$

2. $\triangle ABC$ 가 예각 삼각형일 때 다음 부등식을 증명하여라.

$$2 < \sin A + \sin B + \sin C.$$

3. 다음을 만족하는 최소의 n을 구하여라.

n개의 원들 중에서 임의의 $n-1$ 개의 원이 점을 공유하면 모든 원이 공유하는 점이 존재한다.

= 5.

제6기 한국수학올림피아드 겨울학교 첫주 목요일 연습문제

조합 수학

C1. ① 서로 다른 실수로 이루어진 항수가 (n^2+1)인 임의의 수열은 단조증가이거나 단조감소인, 항수가 $(n+1)$인 부분 수열을 포함함을 증명하라.

② 대회까지 11주 남은 어느 테니스 선수가 대회 출전준비를 위해 매일 한 게임 이상의 연습경기를 하기로 하였다. 피로방지를 위해 이 선수는 한주에 12 게임을 초과하여 연습경기를 갖지는 않았다고 한다. 그러면 이 선수가 며칠간 정확하게 21게임의 경기를 한적이 있음을 증명하라.

C2. 평면위에 서로 다른 두 점 O와 A가 주어졌다. O와는 다른, 평면 상의 임의의 점 X에 대해 OA로부터 시계방향으로 잰 OA와 OX 사이의 각 (라디안)의 측정값을 $\alpha(X)$로 표시하라. $(0 \le \alpha(X) < 2\pi)$. $C(X)$는 점 O를 중심으로 하고 반지름이 $OX + \dfrac{\alpha(X)}{OX}$인 원이다. 평면 위의 모든 점이 유한개의 색깔로 칠해졌을 때 $\alpha(Y) > 0$이고 Y의 색이 원 $C(Y)$의 원주위에 나타나는 점 Y가 존재함을 증명하라.

Hint : 비둘기집원리.

C3. ① $D_0 = 1$. $D_{n+1} = (n+1)D_n + (-1)^{n+1}$ $n = 0, 1, 2, \cdots$

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

임을 보이시오.

② (참고) $\{1, 2, \cdots, n\}$에서 자신으로 가는 전단사 함수로서 $\sigma(i) \ne i$ $\forall_{i}$

인 것의 전체의 갯수가 D_n. 이다.

② $\{1, 2, \cdots, n\}$ 의 순열중에서 정확하게 k개의 부동점을 갖는 것의 갯수를 $P_n(k)$ 라 하라.

이 때 $$\sum_{k=0}^{n} k \cdot P_n(k) = n!$$ 임을 증명하시오.

(단, $f: S \to S$ 에서 $i \in S$ 가 부동점이라함은 $f(i) = i$ 를 의미한다.)

1993년 1월 8일 제1주 수일 연습문제 (11장)

1. 다음 두 수가 무리수임을 보여라.

① 소수점아래로 1부터 차례로 모든 자연수를 붙여쓴 수, 즉,

0.1234567891011121314 ⋯⋯

② 소수점아래 n번째 자리에 n이 소수이면 1, n이 1이거나 합성수이면 0을 쓴 수. 즉,

$$0.01101010001010\cdots$$

$$\uparrow\uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \ \ \uparrow\ \uparrow$$

$$2\ 3\ \ 5\ \ 7\ \ \ 11\ 13$$

2. (Prime Number Producing Machine)

임의의 자연수 n에 대하여 $f(n)$이 소수(prime number)가 되는 그러한 m차 다항식 $f(x)$는 $m=0$인 것, 즉 상수함수밖에 없음을 보여라.

3. 평면 위의 세 개의 원이 만나서 생긴 일곱 개의 영역을 생각하자. (각 원은 네 개의 영역을 포함한다) 한쪽은 희고 한쪽은 검은 7개의 동전을 각 영역에 하나씩 놓는다. 이들 동전에 대해 다음 두 개의 조작이 허용된다.

(a) 한 원 안의 네 개의 동전을 모두 뒤집는다.

(b) 한 원 안의 모든 검은 동전을 뒤집는다.

처음에 모든 동전이 흰색이었다면, 이들 조작을 통해서 가운데 하나만 검게 만들 수 있는가?

1993년 KMO 겨울학교 첫주 금요일 연습문제.

1. 자연수 $\nu > 1$ 와 유한 단조수열 $\{a_0, a_1, \cdots, a_{\nu-1}\} \subset \mathbb{R}$ 이 있다. 다음과 같이 무한 수열 $S = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 을 만들때 S는 주기적인 수열임을 보이고 그 주기 (최소주기)를 구하시오.

$$a_{n+\nu} = \max\{a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots, a_{n+\nu-1}, 0\} - a_n$$

단, 단조수열이라 함은 $\forall_{0 \le i \le \nu-2}\ a_i \le a_{i+1}$ 이거나 $\forall_{0 \le i \le \nu-2}\ a_i \ge a_{i+1}$ 임을 말한다.

수열이 주기적이라 함은 적당한 자연수 p가 있어서

$$a_{n+p} = a_n \quad \forall n \ge N_0 \quad \text{for some } N_0 \in \mathbb{N}$$

임을 말한다.

2. $\triangle P_1P_2P_3$ 는 P_1P_2가 가장 긴 변인 삼각형이다.

각 여섯개의 순열 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$ $\left(\text{i.e. } \begin{matrix} 1 \to i \text{ 로 대응됨} \\ 2 \to j \\ 3 \to k \end{matrix}\right)$ 에 대해, P_{ij} 는 반직선 $\overrightarrow{P_kP_j}$ 위의 점으로서

$$\angle P_kP_iP_{ij} = \angle P_iP_jP_k \text{ 인 점이다.}$$

l_{ij}를 P_kP_{ij}의 길이, a_i를 P_jP_k의 길이라 할때 다음을 증명하시오.

(i) $a_1^2 + a_2^2 = a_3^2 \iff \dfrac{l_{12}}{l_{13}} + \dfrac{l_{21}}{l_{23}} = 1$

(ii) $a_1^3 + a_2^3 = a_3^3 \iff \dfrac{l_{31}}{l_{12}} + \dfrac{l_{32}}{l_{23}} = 1.$

13장

제 6기 겨울학교 연습문제

(1993. 1. 11.)

1. (1) $\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta$ 를 간단히 하면?

(2) $\cos\frac{\pi}{65}\cos\frac{2\pi}{65}\cos\frac{4\pi}{65}\cos\frac{8\pi}{65}\cos\frac{16\pi}{65}\cos\frac{32\pi}{65}$ 의 값은?

2. 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 30°인 부채꼴 CAB에서 호 AB 위의 점을 R, 반지름 CA, CB 위의 점을 각각 P, Q라 할 때, $PQ+QR+RP$의 최소값은?

3. $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=\cos n$, $a_1=a_2=1$일 때 일반항 a_n은?

4. $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ 임을 이용하여 다음 정리를 증명하라.

(정리) $x^2+y^2=z^2$ (x, y, z: 서로 소인 정수)

$\Rightarrow$

$x=r^2-s^2$, $y=2rs$, $z=r^2+s^2$

(x, y는 바뀔 수 있음. r, s: 서로 소인 정수)

2-9

14강

1993년 1월 12일 연습문제

1. $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 은 각각 1 과 -1 값 중의 하나를 가진다.

그리고, $x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_nx_1 + x_{n-1}x_nx_1x_2$
$+ x_nx_1x_2x_3 = 0$ 일 때,

$4|n$ 임을 보여라.

2. $a_0 = 0$, $a_{n+1} = k(a_n+1) + (k+1)a_n + 2\sqrt{k(k+1)a_n(a_n+1)}$
단, $n = 0, 1, 2, \cdots$, k는 양의 정수.
이때, a_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 이 양의 정수가 됨을 보여라.

3. $\forall n$, $f(n)$ 이 항상 소수가 되는
정수 계수의 다항식 $f(x)$ 가 존재하지 않음을 보여라.

4. $P(x)$ 는
$$P(k) = F_k \qquad k = 997, \cdots, 1992$$
를 만족하는 995 차 다항식이다.
(단, F_k는 $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ $n = 2, 3, 4, \cdots$)
인 Fibonacci 수열이다)

$P(1993) = F_{1993} - 1$ 임을 보여라.

15장

5. 예각 삼각형 ABC 가 있다.
A에서 BC 에 내린 수선의 발 H, AH를 지름으로 하는 원을
S_A라 하고, S_A가 변 AB, AC와 만나는 점을 각각
M, N 이라 한다. 또, A를 지나고 MN에 수직인 직선을 L_A라 한다.
같은 방법으로 꼭지점 B, C에 대해 L_B, L_C를 구한다.
이때, L_A, L_B, L_C가 한 점에서 만남을 보여라.

6. 원에 내접하는 사각형 ABCD 에서
대각선 AC, BD의 교점을 L,
C, D 에서 접선의 교점을 M,
AD 와 BC 의 연장선의 교점을 N 이라고 할때,
L, M, N 은 동일한 직선 위에 있음을 보여라.
(단, AD와 BC는 평행하지 않다.)

제 6기 겨울학교 연습문제 16장
(1993. 1. 13.)

1. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ 에 대해 $\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n}$ 의 값은?

2. 3이상의 자연수 n에 대하여 $\cos\frac{2\pi}{n}$와 $\sin\frac{2\pi}{n}$가 모두 유리수일 필요충분 조건은 $n=4$ 임을 증명하시오.

3. $f(p) = \binom{2p}{p} - 2 = \frac{2p(2p-1)\cdots(p+1)}{p(p-1)\cdots 1} - 2$ (p : 소수)

(1) $f(p)$는 p^2의 배수임을 증명하시오. ($p \geq 2$)

(2) $f(p)$는 p^3의 배수임을 증명하시오. ($p \geq 5$)

4. 연속되는 양의 정수의 제곱의 합이 다른 연속되는 양의 정수의 네제곱의 합과 같을 수 있는가? 다시 말하면 양의 정수 중 다음 식을 만족하는 m, n이 존재하는가?

$$m^2+(m+1)^2 = n^4+(n+1)^4$$

5. α는 실수, $N>1$은 정수라 하자. 다음을 만족하는 정수 p, q가 존재함을 보이시오.

$$1 \le q \le N, \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qN}$$

(1) 세 개의 다른 양의 정수 k, l, m에 대하여, 합 $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}$이 $\frac{1}{2}$보다 작지만 $\frac{1}{2}$과 가능한 한 가깝게 하시오.

(2) 네 개의 다른 양의 정수 k, l, m, n으로 합 $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$이 1보다 작지만 1과 가능한 한 가깝게 하시오.

제 6 기 겨울학교 연습문제 (93. 1. 14)
18장

1. a_n을 $a_1 = a_2 = 1$ $a_{n+2} = 7a_{n+1} - a_n - 2$ $(n \ge 1)$
이라 하자.
이 때, a_n이 완전 제곱수 임을 보여라.

2. a와 b는 양의 정수이고, $(ab+1) \mid (a^2+b^2)$ 이다.
이 때, $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ 은 완전 제곱 임을 보여라.

3. n개의 실수 x_i 는 $0 \le x_i \le \frac{\pi}{2}$ $\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{\pi}{2}$ 이다.
이때, $\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right) \ge \cos x_1 \cdot \cos x_2 \cdot \cos x_3 \cdots \cos x_n$
임을 보여라

4. 다음의 무한곱을 계산하시오.
$\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times \cdots$

5. 어떤 국제 회의에 34 개국에서 단장과 부단장이 참석하였다.
회의 전에 사람들이 서로 악수를 나누고, 단 같은 나라의 단장과 부단장은 구면이므로 악수를 하지 않는다.
나중에 한국팀 단장이 나머지 67 명에게 악수한 수를 물어 보니 모두 악수한 사람 수가 달랐다.
이때, 한국팀 단장과 부단장이 악수한 사람들은 몇 명인가.

6. A와 E는 정팔각형의 정 반대편에 있는 두 꼭지점이다.
개구리 한 마리가 A로부터 뛰기 시작한다. 한 꼭지점에서 인접한 두 꼭지점으로 어느 쪽으로든 한 칸만 뛸수 있다.
그러나, E에 도착하면 더 이상 움직이지 않는다.
n번 뛰어서 E에 도착할 경로의 수를 a_n이라 할 때,
$a_{2n-1} = 0$, $a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1}\right)$ $n=1,2,3,\ldots$

제 6기 겨울학교 연습문제

(1993. 1. 15)

1. 세 변의 길이가 a, b, c인 사각형의 넓이를 최대로 하기 위해서는 나머지 한 변의 길이를 얼마로 해야 하는가?

2. 원 γ가 현 AB에 의해서 두 부분으로 나누어져 있다. 반지름의 길이가 r_1인 원 γ_1이 그 한 부분에서 현 AB 위의 중점 C와 원호 위의 점 D에서 내접하고, 반지름의 길이가 r_2인 원 γ_2가 같은 부분에서 원 γ_1에 T에서, 현 AB와 E에서 접하고 원 γ와 내접하고 있다. 원 γ_1, γ_2의 접점 T에서 그은 공통접선이 원 γ와 P, Q에서 만날 때, 선분 PQ의 길이를 r_1, r_2로 나타내라.

3. 자연수 n에 대해
$\binom{n}{r} \equiv 1 \pmod{3}$을 만족하는 $r\ (0 \le r \le n)$의 개수를 a_n, $\binom{n}{r} \equiv 2 \pmod{3}$을 만족하는 $r\ (0 \le r \le n)$의 개수를 b_n이라 하자. 일반항 a_n, b_n을 구하라.

K1

20장

4. ABC는 삼각형이고 X, Y, Z는 각각 BC, CA, AB 위의 점으로 선분 AX, BY, CZ는 ABC 내부의 점 P에서 만난다. 사각형 PYAZ, PZBX, PXCY 중 두 개가 원에 외접하면 나머지도 또한 원에 외접함을 보이라.

5. n은 최소한 두 개의 서로 다른 소인수를 가지는 자연수이다. 다음을 만족하는 $(1, 2, \cdots, n)$의 순열 $(a_1, \cdots, a_n)$이 존재함을 보이라.

$$\sum_{k=1}^{n} k\cos\frac{2\pi a_k}{n} = 0$$

6. 무한히 긴 복도의 한 쪽에 무한히 많은 방들이 일렬로 배치되어 있다. 그 방들 안에는 피아노가 한 대씩 놓여져 있고, 유한한 수의 피아니스트들이 이들 방에서 산다. (한 방에 여러 명이 있을 수도 있다.) 매일, 연속한 두 방 (k번째와 $k+1$번째 방)에 사는 두 명의 피아니스트들이, 각각 $k-1$번째 방과 $k+2$번째 방으로 옮긴다. 이와 같은 행동들이 영원히 계속되지는 못함을 증명하라.

제 6 기 겨울학교 연습문제 (1992. 1. 18)

1. $\sum_{k=0}^{n-2} x^k P_k(x^n) = \sum_{i=0}^{n-1} x^i \cdot Q(x)$ 를 만족하는 다항식, P_k ($k=0, \cdots n-2$) 가 $(x-1)$ 로 나누어 짐을 보여라.

2. $$\begin{cases} f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ & \mathbb{R}^+ = \{x \mid x > 0\} \\ f(xf(y)) = yf(x) \\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \end{cases}$$
의 조건을 만족하는 함수를 모두 구하시오.

3. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x-k)^n$ 을 간단히 하시오.

4. a, b, c 는 0 이 아닌 정수이다.
$ax^2+by^2+cz^2=0$ 이 $x=y=z=0$ 이 아닌 정수해를 가지면,
$ax^2+by^2+cz^2=1$ 도 반드시 유리해를 가짐을 증명하여라.

5. 서로 다른 n 개의 점이 평면 위에 있다.
이 때 단위 길이 만큼만 떨어져 있는 점의 쌍이 $2n^{\frac{3}{2}}$ 보다 적음을 보여라

6. $\{a_n\}, \{b_n\}$ 은 $\begin{cases} a_{n+1} = na_n+1 \\ b_{n+1} = nb_n-1 \end{cases}$ 을 만족하는 자연수열이다.
이 때, 두 수열에 공통으로 가지는 자연수가 유한개 임을 보여라.

제 1기 겨울학교 연습문제

(1993. 1. 19.)

1. 임의의 볼록 n각형 $(n>3)$에 대하여, 그 변들의 길이의 평균은 그 대각선의 길이의 평균보다 작음을 증명하라.

2. $P(x)$는 다음의 조건을 만족하는 $3n$차 방정식이다.

$$\begin{cases} P(0)=P(3)=\cdots=P(3n)=2 \\ P(1)=P(4)=\cdots=P(3n-2)=1 \\ P(2)=P(5)=\cdots=P(3n-1)=0 \\ P(3n+1)=730 \end{cases}$$

n을 구하라.

3. 정수로 된 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같이 정의되어 있다. $a_1=2,\ a_2=7,\ -\frac{1}{2}<a_{n+1}-\frac{a_n^2}{a_{n-1}}\le\frac{1}{2}\quad(n\geq 2)$

$n>1$이면 a_n은 홀수임을 증명하라.

4. 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{d|n} a_d = 2^n$을 만족하도록 정의되었다고 할 때 $n \mid a_n$임을 보여라.

(단, n은 자연수)

1. 어떤 유리수 c/d $(d<100)$가 있어서, $k=1,2,3,\cdots,99$에 대해.

$$\left[k\frac{c}{d}\right]=\left[k\frac{73}{100}\right]$$

을 만족함을 보여라.

2. 수열 $\{a_n\}$은

$$a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}$$

을 만족한다.

a_0가 어떤 값일 때 수렴하는가? 또 그 수렴치는 얼마인가?

3. 임의의 자연수 n에 대해

$$[t^2 n]=[t[tn]+1]$$

임을 증명하여라.

여기서 $t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$이다.

4. 평면에서 $[1,13]\times[1,13]$에 있는 169개의 격자점을 생각한다. 이 중에서 53개의 점을 뽑았을 때, 이 중 4개는 4변이 좌표축에 평행한 직사각형의 꼭지점이 됨을 보여라.

53개일때 [illegible] 않는 경우 [illegible]

5. n은 $n\geq 3$인 정수다. 한 원 둘레 위의 서로 다른 $2n-1$개의 점으로 이루어 진 집합을 E라 하자. E의 점 중에서 꼭 k개의 점에 검은 칠을 할 때, 검은 칠을 한 것 중 적어도 한 쌍의 점이 있어서, 이 두 점을 제외한 두 개의 호 중에서 어느 하나의 호 위에 E의 점이 꼭 n개 있으면, "k개가 칠이 잘 되었다."라고 한다. 모든 k개가 색칠이 잘 된 것이기 위한 k의 최소값을 구하라. (IMO 1990)

KS

PUTNAM 1983 B-2

24장

1. 임의의 양의 정수 n에 대해, n은 2의 지수승들의 합으로 표시될 수 있다. 예를 들어 8은 다음과 같이 된다.

$8,\ 4+4,\ 4+2+2,\ 4+2+1+1,\ 2+2+2+1+1$

여기서 한 가지가 4번 이상 쓰일수는 없다. ($2+2+2+2$는 안됨)

이 때 표현의 방법수를 $C(n)$이라 할때, 모든 자연수 n에 대해

$C(n) = [P(n)]$ 을 만족하는 다항식 $P(x)$가 존재하는가?

2. $f(n) = 1! + 2! + \cdots + n!$, n은 자연수

이 때 모든 자연수 n에 대해 $f(n+2) = P(n)f(n+1) + Q(n)f(n)$

을 만족하는 다항식 $P(x), Q(x)$를 찾아라. PUTNAM 1984 B-1

3. 소수들의 크기 순서에 따라 $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \cdots$ 라 하고

$x_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ 이라 하자. 이 때 임의의 자연수 n에 대해

$x_n < k^2 < x_{n+1}$ 을 만족시키는 정수 k가 항상 존재함을 보여라.

4. $f(x) = x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k$: 정수 계수 다항식

어떤 자연수 n에 대해, $k = k(n)$을 모든 정수 x에 대해

$n \mid f(x)$ 를 만족하는 $f(x)$의 차수중 최소인 것이라 하자.

이 때 n과 $k(n)$ 사이의 관계를 찾아라. (PUTNAM 1974 A-6)

(Hint : $n! \mid (x+1)(x+2)\cdots(x+n)$)

$n \mid k!$

5. $\triangle ABC$의 외심을 O, 무게 중심을 G라 하고, AG, BG의 연장선이 원 O와 만나는 점을 각각 A_1, B_1이라 하자.

이 때 A, B, G, O가 한 원주상에 있다면 다음을 증명하라

i) $AA_1 = BB_1$

ii) $\triangle ABC$는 예각 삼각형