

1. (1965 Putnam)

양의 정수 n 에 대하여 이변수함수

$$f(x, n) = \frac{\binom{n}{0} + \binom{n}{2}x + \binom{n}{4}x^2 + \dots}{\binom{n}{1} + \binom{n}{3}x + \binom{n}{5}x^2 + \dots}$$

이라 하자. $f(x, n+1)$ 을 $f(x, n)$ 과 x 로 나타내라.

(*) $\binom{n}{k} = nC_k$ 는 서로 다른 n 개에서 중복하지 않고 k 개를 뽑는 조합의 수를 나타낸다. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ 을 이용하라.)

2. (1977 U.S.MO)

$0 < p < q$ 이고 $a, b, c, d, e \in [p, q]$ 이면

$$(a+b+c+d+e) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} \right) \leq 25 + 6 \left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}} \right)^2$$

임을 증명하여라. 또한, 등호가 성립한 조건을 찾아라.

(*) $a \in [p, q]$ 라는 기호의 뜻은 $p \leq a \leq q$ 이다.)

1. ① (1959 IMO) $\frac{2n+4}{14n+3}$ 은 기약 분수다. n 은 자연수.
 $n \in \mathbb{N}$

② 41 은 $25x+3y$ 를 나눈다 $(41 \mid 25x+3y)$

\Leftrightarrow 41 은 $31x+7y$ 를 나눈다. $(41 \mid 31x+7y)$

③ n^3+100 이 $n+10$ 의 배수가 되는 가장 큰 양의 정수 n 을 구하라.

④ a 와 $b > 2$ 는 자연수일때 2^a+1 은 2^b-1 로 나누어질 수 있는지 보시오.

2. ① $10^k \mid n!$ 이 되는 최대 정수 k 가 100이 되는 양의 정수 n 을 찾으시오.

② $n = r_m p^m + r_{m-1} p^{m-1} + \dots + r_0$ $0 \leq r_i < p$ 를

n 의 p 진법 표현이라 할때 $p^k \mid n!$ 이 되는

최대의 정수는

$$k = \frac{n - (r_m + r_{m-1} + \dots + r_0)}{p-1}$$

임을 보여라. (p 는 소수)

③ 360의 약수의 합을 구하라. 360과 서로소인 자연수의 합을 구하라.

3. ① $x^4+y^4=1992$ 를 만족하는 정수해가 없음을 보시오

② 왼쪽은 바로기 숫자와 1이 곱해진 숫자들을 더해

연은 피타고라스이다. (없을때는 0으로 간주)

1 3 6 10 15 21 28 36 45 55 66 78 91 105 120 136 153 171 190 210 231 252 274 300 327 355 384 414 445 477 510 545 581 618 657 700 744 790 837 886 937 990 1045 1102 1161 1222 1285 1350 1417 1486 1557 1630 1705 1782 1861 1942 2025 2110 2200 2292 2385 2480 2577 2676 2777 2880 2985 3092 3201 3312 3425 3540 3657 3776 3897 4020 4145 4272 4401 4532 4665 4800 4937 5076 5217 5360 5505 5652 5801 5952 6105 6260 6417 6576 6737 6900 7065 7232 7401 7572 7745 7920 8100 8283 8468 8655 8844 9035 9228 9423 9620 9819 10020 10223 10428 10635 10844 11055 11268 11483 11700 11919 12140 12363 12588 12815 13044 13275 13508 13743 13980 14219 14460 14703 14948 15195 15444 15695 15948 16203 16460 16719 16980 17243 17508 17775 18044 18315 18588 18863 19140 19419 19700 19983 20268 20555 20844 21135 21428 21723 22020 22319 22620 22923 23228 23535 23844 24155 24468 24783 25100 25419 25740 26063 26388 26715 27044 27375 27708 28043 28380 28719 29060 29403 29748 30095 30444 30795 31148 31503 31860 32219 32580 32943 33308 33675 34044 34415 34788 35163 35540 35919 36300 36683 37068 37455 37844 38235 38628 39023 39420 39819 40220 40623 41028 41435 41844 42255 42668 43083 43500 43919 44340 44763 45188 45615 46044 46475 46908 47343 47780 48219 48660 49103 49548 49995 50444 50895 51348 51803 52260 52719 53180 53643 54108 54575 55044 55515 55988 56463 56940 57419 57900 58383 58868 59355 59844 60335 60828 61323 61820 62319 62820 63323 63828 64335 64844 65355 65868 66383 66900 67419 67940 68463 68988 69515 70044 70575 71108 71643 72180 72719 73260 73803 74348 74895 75444 75995 76548 77103 77660 78219 78780 79343 79908 80475 81044 81615 82188 82763 83340 83919 84500 85083 85668 86255 86844 87435 88028 88623 89220 89819 90420 91023 91628 92235 92844 93455 94068 94683 95300 95919 96540 97163 97788 98415 99044 99675 100308 100943 101580 102219 102860 103503 104148 104795 105444 106095 106748 107403 108060 108719 109380 110043 110708 111375 112044 112715 113388 114063 114740 115419 116100 116783 117468 118155 118844 119535 120228 120923 121620 122319 123020 123723 124428 125135 125844 126555 127268 127983 128700 129419 130140 130863 131588 132315 133044 133775 134508 135243 135980 136719 137460 138203 138948 139695 140444 141195 141948 142703 143460 144219 144980 145743 146508 147275 148044 148815 149588 150363 151140 151919 152700 153483 154268 155055 155844 156635 157428 158223 159020 159819 160620 161423 162228 163035 163844 164655 165468 166283 167100 167919 168740 169563 170388 171215 172044 172875 173708 174543 175380 176219 177060 177903 178748 179595 180444 181295 182148 183003 183860 184719 185580 186443 187308 188175 189044 189915 190788 191663 192540 193419 194300 195183 196068 196955 197844 198735 199628 200523 201420 202319 203220 204123 205028 205935 206844 207755 208668 209583 210498 211415 212334 213255 214178 215103 216030 216959 217890 218823 219758 220695 221634 222575 223518 224463 225410 226359 227310 228263 229218 230175 231134 232095 233058 234023 234990 235959 236930 237903 238878 239855 240834 241815 242798 243783 244770 245759 246750 247743 248738 249735 250734 251735 252738 253743 254750 255759 256770 257783 258798 259815 260834 261855 262878 263903 264930 265959 266990 268023 269058 270095 271134 272175 273218 274263 275310 276359 277410 278463 279518 280575 281634 282695 283758 284823 285890 286959 288030 289103 290178 291255 292334 293415 294498 295583 296670 297759 298850 299943 301038 302135 303234 304335 305438 306543 307650 308759 309870 310983 312098 313215 314334 315455 316578 317703 318830 319959 321090 322223 323358 324495 325634 326775 327918 329063 330210 331359 332510 333663 334818 335975 337134 338295 339458 340623 341790 342959 344130 345303 346478 347655 348834 350015 351198 352383 353568 354755 355944 357135 358328 359523 360720 361919 363120 364323 365528 366735 367944 369155 370368 371583 372800 374019 375240 376463 377688 378915 380144 381375 382608 383843 385080 386319 387560 388803 390048 391295 392544 393795 395048 396303 397560 398819 400080 401343 402608 403875 405144 406415 407688 408963 410240 411519 412800 414083 415368 416655 417944 419235 420528 421823 423120 424419 425720 427023 428328 429635 430944 432255 433568 434883 436200 437519 438840 440163 441488 442815 444144 445475 446808 448143 449480 450819 452160 453503 454848 456195 457544 458895 460248 461603 462960 464319 465680 467043 468408 469775 471144 472515 473888 475263 476640 478019 479400 480783 482168 483555 484944 486335 487728 489123 490518 491915 493314 494715 496118 497523 498930 500339 501750 503163 504578 505995 507414 508835 510258 511683 513110 514539 515970 517403 518838 520275 521714 523155 524598 526043 527490 528939 530390 531843 533298 534755 536214 537675 539138 540603 542070 543539 545010 546483 547958 549435 550914 552395 553878 555363 556850 558339 559830 561323 562818 564315 565814 567315 568818 570323 571830 573339 574850 576363 577878 579395 580914 582435 583958 585483 587010 588539 590070 591603 593138 594675 596214 597755 599300 600847 602395 603944 605495 607048 608603 610160 611719 613280 614843 616408 617975 619544 621115 622688 624263 625840 627419 629000 630583 632168 633755 635344 636935 638528 640123 641720 643319 644920 646523 648128 649735 651344 652955 654568 656183 657800 659419 661040 662663 664288 665915 667544 669175 670808 672443 674080 675719 677360 678995 680634 682275 683918 685563 687210 688859 690510 692163 693818 695475 697134 698795 700458 702123 703790 705459 707130 708803 710478 712155 713834 715515 717198 718883 720570 722259 723950 725643 727338 729035 730734 732435 734138 735843 737550 739259 740970 742683 744398 746115 747834 749555 751278 753003 754730 756459 758190 759923 761658 763395 765134 766875 768618 770363 772110 773859 775610 777363 779118 780875 782634 784395 786158 787923 789690 791459 793230 795003 796778 798555 800334 802115 803898 805683 807470 809259 811050 812843 814638 816435 818234 820035 821838 823643 825450 827259 829070 830883 832698 834515 836334 838155 839978 841803 843630 845459 847290 849123 850958 852795 854634 856475 858318 860163 862010 863859 865710 867563 869418 871275 873134 875000 876863 878730 880600 882473 884348 886225 888105 890000 891890 893783 895678 897575 899475 901378 903283 905190 907100 909013 910928 912845 914765 916688 918613 920540 922469 924400 926333 928268 930205 932145 934088 936033 937980 939929 941880 943833 945788 947745 949705 951668 953633 955600 957569 959540 961513 963488 965465 967445 969428 971413 973400 975389 977380 979373 981368 983365 985365 987368 989373 991380 993389 995399 997410 999423 1001438 1003455 1005474 1007495 1009518 1011543 1013570 1015599 1017630 1019663 1021698 1023735 1025774 1027815 1029858 1031903 1033950 1035999 1038050 1040103 1042158 1044215 1046274 1048335 1050398 1052463 1054530 1056599 1058670 1060743 1062818 1064895 1066974 1069055 1071138 1073223 1075310 1077400 1079493 1081588 1083685 1085784 1087885 1089988 1092093 1094200 1096309 1098420 1100533 1102648 1104765 1106884 1109005 1111128 1113253 1115380 1117509 1119640 1121773 1123908 1126045 1128184 1130325 1132468 1134613 1136760 1138909 1141060 1143213 1145368 1147525 1149684 1151845 1154008 1156173 1158340 1160509 1162680 1164853 1167028 1169205 1171384 1173565 1175748 1177933 1180120 1182309 1184499 1186690 1188883 1191078 1193275 1195474 1197675 1199878 1202083 1204290 1206499 1208710 1210923 1213138 1215355 1217574 1219795 1222018 1224243 1226470 1228699 1230930 1233163 1235398 1237635 1239874 1242115 1244358 1246603 1248850 1251099 1253350 1255603 1257858 1260115 1262374 1264635 1266898 1269163 1271430 1273699 1275970 1278243 1280518 1282795 1285074 1287355 1289638 1291923 1294210 1296499 1298790 1301083 1303378 1305675 1307974 1310275 1312578 1314883 1317190 1319500 1321813 1324128 1326445 1328764 1331085 1333408 1335733 1338060 1340389 1342720 1345053 1347388 1349725 1352064 1354405 1356748 1359093 1361440 1363789 1366140 1368493 1370848 1373205 1375564 1377925 1380288 1382653 1385020 1387389 1389760 1392133 1394508 1396885 1399264 1401645 1404028 1406413 1408800 1411189 1413580 1415973 1418368 1420765 1423164 1425565 1427968 1430373 1432780 1435189 1437599 1440010 1442423 1444838 1447255 1449674 1452095 1454518 1456943 1459370 1461799 1464230 1466663 1469100 1471539 1473980 1476423 1478868 1481315 1483764 1486215 1488668 1491123 1493580 1496039 1498499 1500960 1503423 1505888 1508355 1510824 1513295 1515768 1518243 1520720 1523199 1525680 1528163 1530648 1533135 1535624 1538115 1540608 1543103 1545599 1548096 1550595 1553096 1555599 1558104 1560610 1563117 1565626 1568137 1570649 1573162 1575677 1578194 1580713 1583234 1585757 1588282 1590809 1593338 1595869 1598402 1600937 1603474 1606013 1608554 1611097 1613642 1616189 1618738 1621289 1623842 1626397 1628954 1631513 1634074 1636637 1639202 1641769 1644338 1646909 1649482 1652057 1654634 1657213 1659794 1662377 1664962 1667549 1670138 1672729 1675322 1677917 1680514 1683113 1685714 1688317 1690922 1693529 1696138 1698749 1701362 1703977 1706594 1709213 1711834 1714457 1717082 1719709 1722338 1724969 1727599 1730231 1732864 1735499 1738136 1740775 1743416 1746059 1748704 1751351 1753999 1756649 1759300 1761953 1764608 1767265 1769924 1772585 1775248 1777913 1780580 1783249 1785920 1788593 1791268 1793945 1796624 1799305 1801988 1804673 1807360 1810049 1812740 1815433 1818128 1820825 1823524 1826225 1828928 1831633 1834340 1837049 1839760 1842473 1845188 1847905 1850624 1853345 1856068 1858793 1861520 1864249 1866980 1869713 1872448 1875185 1877924 1880665 1883408 1886153 1888900 1891649 1894400 1897153 1899908 1902665 1905424 1908185 1910948 1913713 1916480 1919249 1922020 1924793 1927568 1930345 1933124 1935905 1938688 1941473 1944260 1947049 1949840 1952633 1955428 1958225 1961024 1963825 1966628 1969433 1972240 1975049 1977860 1980673 1983488 1986305 1989124 1991945 1994768 1997593 2000420 2003249 2006080 2008913 2011748 2014585 2017424 2020265 2023108 2025953 2028799 2031646 2034495 2037346 2040199 2043054 2045911 2048770 2051631 2054494 2057359 2060226 2063095 2065966 2068839 2071714 2074591 2077470 2080351 2083234 2086119 2089006 2091895 2094786 2097679 2100574 2103471 2106370 2109271 2112174 2115079 2117986 2120895 2123806 2126719 2129634 2132551 2135470 2138391 2141314 2144239 2147166 2150095 2153026 2155959 2158894 2161831 2164770 2167711 2170654 2173599 2176546 2179495 2182446 2185399 2188354 2191311 2194270 2197231 2200194 2203159 2206126 2209095 2212066 2215039 2218014 2220991 2223970 2226951 2229934 2232919 2235906 2238895 2241886 2244879 2247874 2250871 2253870 2256871 2259874 2262879 2265886 2268895 2271906 2274919 2277934 2280951 2283970 2286991 2290014 2293039 2296066 2299095 2302126 2305159 2308194 2311231 2314270 2317311 2320354 2323399 2326446 2329495 2332546 2335599 2338654 2341711 2344770 2347831 2350894 2353959 2357026 2360095 2363166 2366239 2369314 2372391 2375470 2378551 2381634 2384719 2387806 2390895 2393986 2397079 2400174 2403271 2406370 2409471 2412574 2415679 2418786 2421895 2425006 2428119 2431234 2434351 2437470 2440591 2443714 2446839 2449966 2453095 2456226 2459359 2462494 2465631 2468770 2471911 2475054 2478199 2481346 2484495 2487646

1. 원에 내접하는 사각형과 원 위에 한 점이 주어려 있다.

이 점에서 두 대변에 이르는 거리의 곱과 다른 두 변에 이르는 거리의 곱,
두 대각선에 이르는 거리의 곱은 모두 같다는 것을 보여라.

2. 삼각형 ABC의 변 AB, BC, CA 위에 (바깥쪽으로) 세 개의 점은 이등변 삼각형
 $\triangle AC_1B$, $\triangle BA_1C$, $\triangle CB_1A$ 를 만든다. ($\angle A_1$, $\angle B_1$, $\angle C_1$ 이 꼭지각)

이 때 세 직선 AA_1 , BB_1 , CC_1 이 한 점에서 만남을 보여라

1993年 1月 6日 제1주 2인 연습문제

1. ① 정수 n 이 두 삼각수의 합인 때 즉

$$n = \frac{a^2+a}{2} + \frac{b^2+b}{2}$$

인 때 $4n+1 = x^2+y^2$ 을 만족하는 정수 x, y 를 a, b 로 나타내어라.

반대로, $4n+1 = x^2+y^2$ 이라면 n 이 두 삼각수의 합으로 표현됨을 보여라.

(\times : a 가 정수일 때 $\frac{a^2+a}{2}$ 를 삼각수라 한다. 삼각수는 정수이다.)

② m 명의 경기자 P_1, P_2, \dots, P_m ($m > 1$) 이 각각 1번씩 서로 경기를 갖고 (즉 1명이 $n-1$ 번 경기를 갖는다.) 무승부는 없다고 한다.

w_r 과 l_r 을 각각 P_r 경기자가 이기고 진 경기의 횟수라고 할 때

$$\sum_{r=1}^m w_r^2 = \sum_{r=1}^m l_r^2$$

이 성립함을 보여라.

(\times : $\sum_{r=1}^m a_r = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m$)

2. 실수 x, y, z, w 에 대한 4원 연립방정식

$$\begin{cases} x+y+z=w \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{w} \end{cases}$$

의 모든 해를 찾으라.

1993 KMO 겨울학기. 19월 6일 문제. 정수론 부분 - page 1

(5장)

1. (잉여류, Euler 항)

① $r \in \mathbb{Z}, d, k \in \mathbb{N} \quad d \mid k \quad (r, d) = 1$
 (i.e. r 과 d 는 서로소)

$$S = \{ r + td \mid t = 1, 2, \dots, \frac{k}{d} \}$$

S 안에 있는 수 중 k 과 서로 소인 원소의 갯수는

$$\frac{\phi(k)}{\phi(d)}$$

임을 보거나

(주: $\phi(n) = \#\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq n, \gcd(n, x) = 1\}$
 = n 보다 작고 n 과 서로 소인 자연수의 갯수)

② $(m, n) = 1$

$$\Rightarrow m^{\phi(n)} + n^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}$$

③ $2^{1993} \mid 23^n - 1$ 인 가장 작은 자연수 n 은?

④ 유클리드 알고리즘의 정수 n 에 대해

$$5 \nmid \sum_{k=0}^n 2^{3k} \binom{2n+1}{2k+1}$$

임을 보이시오.

2. (Arithmetic functions)

① $\Lambda: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ 인 함수 Λ 는 $\Lambda(n) = \begin{cases} \log p: n = p^k, k \geq 1 \\ 0: \text{otherwise} \end{cases}$ 로 정의 되었다. 다음을 보이시오.

(i) $\sum_{d \mid n} \Lambda(d) = \log n$

(ii) $\sum_{1 \leq k \leq n} \Lambda(k) \left[\frac{n}{k} \right] = \log n!$

5

6장

② $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 인 함수 f 는

$$f(m, n) = \frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1) + m$$

으로 정의 되었다. f 는 단사함수임을 보이시오.

③ (1988 IMO.4)

$\left\{ x \mid \sum_{k=1}^{90} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4} \right\}$ 는 서로소인 x 가 아닌 항함수이고 (2집합이 없는)

\mathbb{I} 구간의 길이의 합은 1988임을 보이시오.

3. 실수 a 는 음이 아닌 정수 x_1, \dots, x_7 이 대해

$$\sum_{k=1}^7 kx_k = a, \quad \sum_{k=1}^7 k^2 x_k = a^2, \quad \sum_{k=1}^7 k^3 x_k = a^3 \quad \text{이다.}$$

이러한 실수 a 를 모두 찾아라.

1. 1) 원 C 에 세각 삼각형 ABC 가 내접하고 있다. AB, BC, CA 를
 현으로 가지는 세 개의 원호 (둘 중의 길이가 작은) \widehat{AB} , \widehat{BC} , \widehat{CA} 를
 삼각형 안쪽으로 접을 때 이들이 삼각형의 수심에서 만남을 보여라.

2) 두각 삼각형이라면 이 문제는 다음과 같이 된다.

" 원 C 라 합동이고 (반지름이 같고), 원 C 라 일치하지는 않으며, A, B, C 중
 두 점을 지나는 세 원은 $\triangle ABC$ 의 수심에서 만난다. "
 이것을 보여라.

3) 위의 결과를 이용하여 다음을 증명하여라 :

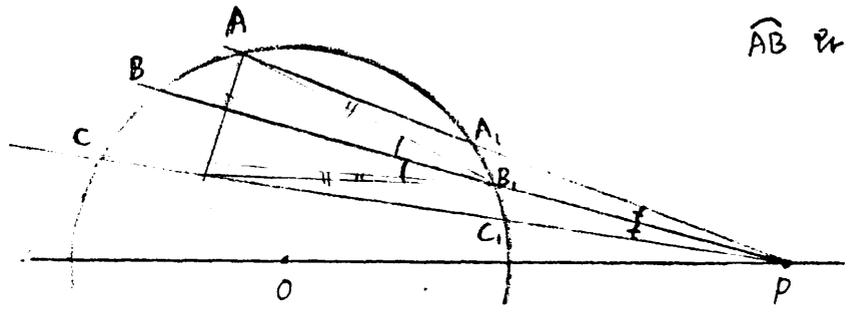
\widehat{AB} , \widehat{BC} , \widehat{CA} 의 중점을 D, E, F 라 할 때 육각형 ADBECFA 의
 넓이는 $\triangle ABC$ 의 넓이의 두 배보다 크다.
 (거나 같다)

2. 아래 그림에서 P 는 반원의 지름의 연장선상의 임의의 점이다.

직선 BP 가 $\angle APC$ 를 이등분할 때

\widehat{AB} 라 \widehat{BC} 의 길이를
 비교하여라.

(이분을 이용하지 말것)



$\angle > \sim - ||$

1993年 1月 7日 제1주 3일 연습문제

1. 모든 자연수는 다른 자연수들의 합으로 나타낼 수 있다. (예: $6 = 1 + 2 + 3$)

$a(n)$ 을 n 은 1과 2의 합으로 나타낼 때 순서도 고려한 가지수라고 하고
 $b(n)$ 을 n 은 1보다 큰 자연수들의 합으로 나타낼 때 순서도 고려한 가지수
라고 하자. 가령 다음과 같이 $a(4) = 5$, $b(6) = 5$ 이다.

a 항	b 항
$1 + 1 + 2$	$4 + 2$
$1 + 2 + 1$	$3 + 3$
$2 + 1 + 1$	$2 + 4$
$2 + 2$	$2 + 2 + 2$
$1 + 1 + 1 + 1$	6

(a) a 항과 b 항 사이에 1:1 대응을 만듦으로써 임의의 n 에 대해
 $a(n) = b(n+2)$ 임을 보여라.

(b) $a(1) = 1$, $a(2) = 2$ 이고 $n > 2$ 일 때 $a(n) = a(n-1) + a(n-2)$
임을 보여라.

2. S 가 집합이고 $*$ 가 S 위에서 정의된 이항연산으로 다음 두 조건을
만족하라 하자.

$$\forall x, y, z \in S, \quad x * x = x$$

$$(x * y) * z = (y * z) * x$$

이때 $x * y = y * x$ (즉, $*$ 가 교환법칙이 성립)임을 보여라.

(2) $*$ 가 다음 두조건을 만족한 때 역시 $x * y = y * x$ 임을 보여라.

$$\forall x, y \in S, \quad x * (x * y) = y$$

$$(y * x) * x = y$$

($\forall x \in S$, ; S 의 원소인 임의의 x 에 대해서)

1. $\triangle ABC$ 에서 다음 부등식을 증명하여라.

$$1 < \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}$$

2. $\triangle ABC$ 가 예각 삼각형일 때 다음 부등식을 증명하여라.

$$2 < \sin A + \sin B + \sin C.$$

3. 다음을 만족하는 최소의 n 을 구하여라.

n 개의 원들 중에서 임의의 $n-1$ 개의 원이
공유하면 모든 원이 공유하는 점이 존재한다.

= 5

제6기 한국수학올림피아드 겨울학기 선구 클럽의 연습문제 조합 수학 page -1

C1. ① ^{1/4n} 실수로 이루어진 항수가 (n^2+1) 인 일차의 수열은 단조증가이거나 단조감소인, 항수가 $(n+1)$ 인 부분 수열을 포함함을 증명하라.

② 대회가래 11주 동안 어느 테니스 선수가 대회 출전 준비를 위해 매일 한 게임 이상의 연습 경기를 하기로 하였다. 피로 방지를 위해 이 선수는 한 주에 12 게임을 초과하여 연습 경기를 갖지는 않았다고 한다. 그러면 이 선수가 몇 일간 정확히 12 게임의 경기를 한 적이 있음을 증명하라.

C2. 평면 위에 서로 다른 두 점 O와 A가 주어졌다. O와 A는 다른, 평면 상의 일차의 점 X에 대해 OA로부터 시계 방향으로 켜진 OA와 OX 사이의 각 (라디안)의 측정값은 $\alpha(X)$ 로 표시하라. ($0 \leq \alpha(X) < 2\pi$). $C(X)$ 는 점 O를 중심으로 하고 반지름이 $OX + \frac{\alpha(X)}{OX}$ 인 원이다. 평면 위의 모든 점이 유한 개의 색갈로 칠해졌을 때 $\alpha(Y) > 0$ 이고 Y의 색이 원 $C(Y)$ 의 원주위에 나타나는 점 Y가 존재함을 증명하라
Hint: 비둘기집원리.

C3. ① $D_0 = 1, D_{n+1} = (n+1)D_n + (-1)^{n+1} \quad n=0, 1, 2, \dots$
 $D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$

임을 보이시오.

② (참고) $\{1, 2, \dots, n\}$ 에서 각 원으로 가는 선단사 함수로서 $\sigma(i) \neq i \quad \forall i$

인 것의 전체의 갯수가 D_n 이다.

② $\{1, 2, \dots, n\}$ 의 순열중에서 정확히 k 개의
부동점을 갖는 것의 갯수를 $P_n(k)$ 라 하자.

이 때 $\sum_{k=0}^n k \cdot P_n(k) = n!$ 임을 증명하시오.

(단, $f: S \rightarrow S$ 에서 $s \in S$ 가 부동점이라 함은 $f(s) = s$ 를
의미한다.)

D

1, 2, 3

1993년 1월 8일 제1주 수일 연습문제

11장

1. 다음 두 수가 무리수임을 보여라.

① 소수점아래로 1부터 차례로 모든 자연수를 붙여쓴 수, 즉,

0.1234567891011121314.....

② 소수점아래 n 번째 자리에 n 이 소수이면 1, n 이 1이거나 합성수이면 0을 쓴 수, 즉,0.01101010001011.....
 $\begin{matrix} \uparrow\uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ 23 & 5 & 7 & & 11 & 13 \end{matrix}$

2. (Prime Number Producing Machine)

★ 임의의 자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 이 소수 (prime number) 가 되는
 그러한 n 차 다항식 $f(x)$ 는 $n=0$ 인 것, 즉 상수함수 밖에 없음을
 보여라.

3. 평면 위의 세 개의 원이 만나서 생긴 일곱 개의 영역을 생각하자.

(각 원은 네 개의 영역을 포함한다) 한쪽은 희고 한쪽은 검은
 7개의 동전을 각 영역에 하나씩 놓는다. 이들 동전에 대해
 다음 두 개의 조각이 허용된다.

(a) 한 원 안의 네 개의 동전을 모두 뒤집는다.

(b) 한 원 안의 모든 검은 동전을 뒤집는다.

처음에 모든 동전이 흰색이었다면, 이들 조각을 통해서

가운데 하나만 검은게 만들 수 있는가?

1. 자연수 v 가 와 유한 단조수열 $\{a_0, a_1, \dots, a_{v-1}\} \subset \mathbb{R}$ 이 있다. 다음과 같이 무한 수열 $S = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 을 만들 때 S 은 주기적인 수열임을 보이고 그 주기 (최소주기) 를 구하시오.

$$a_{n+v} = \max\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{n+v-1}, 0\} - a_n$$

단, 단조수열이라 함은 $\forall 0 \leq i \leq v-2 \quad a_i \leq a_{i+1}$ 이거나 $\forall 0 \leq i \leq v-2 \quad a_i \geq a_{i+1}$ 임을 말한다.

수열이 주기적이라 함은 적당한 자연수 p 가 있어서 $a_{n+vp} = a_n \quad \forall n \geq N_0$ for some $N_0 \in \mathbb{N}$ 임을 말한다.

2. $\triangle P_1 P_2 P_3$ 은 $P_1 P_2$ 가 가장 긴 변인 삼각형이다.

각 여섯개의 순열 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$ (i.e. $1 \rightarrow i, 2 \rightarrow j, 3 \rightarrow k$) 로 대응됨

에 대해, P_{ij} 는 반직선 $\overrightarrow{P_k P_j}$ 위의 점으로서 $\angle P_k P_i P_j = \angle P_i P_j P_k$ 인 점이다.

l_{ij} 를 $P_k P_i P_j$ 의 길이, a_i 를 $P_j P_k$ 의 길이나 할 때 다음을 증명하시오.

(i) $a_1^2 + a_2^2 = a_3^2 \iff \frac{l_{12}}{l_{13}} + \frac{l_{21}}{l_{23}} = 1$

(ii) $a_1^3 + a_2^3 = a_3^3 \iff \frac{l_{31}}{l_{12}} + \frac{l_{32}}{l_{23}} = 1$

제 6기 겨울학교 연습문제

(1993. 1. 11.)

1. (1) $\sum_{k=1}^n \sin k\theta$ 를 간단히 하면?(2) $\cos \frac{\pi}{65} \cos \frac{2\pi}{65} \cos \frac{4\pi}{65} \cos \frac{8\pi}{65} \cos \frac{16\pi}{65} \cos \frac{32\pi}{65}$ 의 값은?2. 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 30° 인 부채꼴 CAB 에서 호 AB 위의 점을 R , 반지름 CA, CB 위의 점을 각각 P, Q 라 할 때, $PQ + QR + RP$ 의 최소값은?3. $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = \cos n$, $a_1 = a_2 = 1$ 일 때 일반항 a_n 은?4. $\tan \frac{\epsilon}{2} = \frac{\sin \epsilon}{1 + \cos \epsilon}$ 임을 이용하여

다음 정리를 증명하라.

(정리) $x^2 + y^2 = z^2$ (x, y, z : 서로 소인 정수) \Rightarrow

$$x = r^2 - s^2, \quad y = 2rs, \quad z = r^2 + s^2$$

 $(x, y$ 는 바뀔 수 있음. r, s : 서로 소인 정수)

993년 1월 12일 연습문제

1. x_1, x_2, \dots, x_n 은 각각 1과 -1 값중의 하나를 가진다.

그러고, $x_1 x_2 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 x_5 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n x_1 + x_{n-1} x_n x_1 x_2 + x_n x_1 x_2 x_3 = 0$ 일 때,

$4 | n$ 임을 보여라.

2. $a_0 = 0$, $a_{n+1} = k(a_n + 1) + (k+1)a_n + 2\sqrt{k(k+1)a_n(a_n+1)}$
단, $n = 0, 1, 2, \dots$, k 는 양의 정수.

이때, a_n ($n=1, 2, 3, \dots$) 이 양의 정수가 됨을 보여라.

3. $\forall n$, $f(n)$ 이 항상 숫수가 되는 정수 계수의 다항식 $f(x)$ 가 존재하지 않음을 보여라.

4. $P(x)$ 는

$P(k) = F_k$ $k = 997, \dots, 1992$

를 만족하는 995 차 다항식이다.

(단, F_k 는 $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ($n=2, 3, 4, \dots$) 인 Fibonacci 수열이다)

$P(1993) = F_{1993} - 1$ 임을 보여라.

5. 예각 삼각형 ABC 가 있다.

A 에서 BC 에 내린 수선의 발 H , AH 를 지름으로 하는 원을 S_A 라 하고, S_A 가 변 AB, AC 와 만나는 점을 각각 M, N 이라 한다. 또, A 를 지나고 MN 에 수직인 직선을 L_A 라 한다.

같은 방법으로 꼭지점 B, C 에 대해 L_B, L_C 를 구한다.

이때, L_A, L_B, L_C 가 한 점에서 만남을 보여라.

6. 원에 내접하는 사각형 $ABCD$ 에서

대각선 AC, BD 의 교점을 L ,

C, D 에서 접선의 교점을 M ,

AD 와 BC 의 연장선의 교점을 N 이라고 할 때,

L, M, N 은 동일한 직선 위에 있음을 보여라.

(단, AD 와 BC 는 평행하지 않다.)

제 6기 겨울학교 연습문제

16장

9993. 1. 13.)

1. $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$, $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ 에 대해

Q. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$ 의 값은?

2. 3이상의 자연수 n 에 대하여 $\cos \frac{2\pi}{n}$ 와

$\sin \frac{2\pi}{n}$ 가 모두 유리수일 필요충분 조건은

$n=4$ 임을 증명하시오.

3. $f(p) = \binom{2p}{p} - 2 = \frac{2p(2p-1) \cdots (p+1)}{p(p-1) \cdots 1} - 2$

(p : 소수)

(1) $f(p)$ 는 p^2 의 배수임을 증명하시오. ($p \geq 2$)

(2) $f(p)$ 는 p^3 의 배수임을 증명하시오. ($p \geq 5$)

4. 연속되는 양의 정수의 제곱의 합이 다른 연속되는 양의 정수의 네제곱의 합과 같을 수 있는가? 다시 말하면 양의 정수 중 다음 식을 만족하는 m, n 이 존재하는가?

$$m^2 + (m+1)^2 = n^4 + (n+1)^4$$

5. d 는 실수, $N > 1$ 은 정수라 하자. 다음을 만족하는 정수 p, q 가 존재함을 보이시오.

$$1 \leq q \leq N, \quad \left| d - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qN}$$

(1) 세 개의 다른 양의 정수 k, l, m 에 대하여, 합 $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m}$ 이 $\frac{1}{2}$ 보다 작지만 $\frac{1}{2}$ 과 가능한 한 가깝게 하시오.

(2) 네 개의 다른 양의 정수 k, l, m, n 으로 합 $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 이 1 보다 작지만 1 과 가능한 한 가깝게 하시오.

$$d = \frac{1}{5.5} \approx 0.1818$$

$p \geq 5$
 $q \geq 5$

$$\left| \frac{1}{5.5} - \frac{1}{6} \right| = \frac{1}{33} < \frac{1}{6 \cdot 5} = \frac{1}{30}$$

$p \geq 2$
 $q \geq 5$

제 6 기 겨울 학교 연습 문제 (93. 1. 14) (8장)

1. a_n 은 $a_1 = a_2 = 1$ $a_{n+1} = 7(a_{n+1} - a_n - 2)$ (421)

이라 하자.

이 때, a_n 이 완전 제곱수임을 보여라.

2. a 와 b 는 양의 정수이고, $(ab+1) \mid (a^2+b^2)$ 이다.

이 때, $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ 은 완전 제곱수임을 보여라.

3. 양의 실수 x_i 는 $0 \leq x_i \leq \frac{\pi}{2}$ $\sum_{i=1}^n x_i = \frac{\pi}{2}$ 이다.

이 때, $\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right) \geq \cos x_1 \cos x_2 \cos x_3 \dots \cos x_n$

임을 보여라.

4. 다음의 무한 곱을 계산하시오.

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times \dots$$

5. 어떤 국제 회의에 34 개국에서 단장과 부단장이 참석하였다.

회의 전에 사람들이 서로 악수를 나누고, 단 같은 나라의

단장과 부단장은 구면이므로 악수를 하지 않는다.

바깥에 한국팀 단장이 나머지 67 명에게 악수한 수를 물어 보니 모두 악수한 사람 수가 같았다.

이 때, 한국팀 단장과 부단장이 악수한 사람들은 몇 명인가.

6. A 와 E 는 정팔각형의 정 반대편에 있는 두 꼭지점이다.

개구리 한 마리가 A로부터 뛰기 시작한다. 한 꼭지점에서 인접한 두 꼭지점으로 어느 쪽으로든 한 칸만 뛸 수 있다.

그러나, E 에 도착하면 더 이상 움직이지 않는다.

n 번 뛰어서 E 에 도착할 횟수의 수를 a_n 이라 할 때,

$$a_{2n+1} = 0, \quad a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((2+\sqrt{2})^n - (2-\sqrt{2})^n \right) \quad n=1, 2, 3, \dots$$

제 6기 거울학교 연습 문제

(1993. 1. 15)

1. 세 변의 길이가 a, b, c 인 사각형의 변적을 최대로 하기 위해서는 나머지 한 변의 길이를 얼마로 해야 하는가?

2. 원 γ 가 현 AB 에 의해서 두 부분으로 나누어져 있다. 반지름의 길이가 r_1 인 원 γ_1 이 그 한 부분에서 현 AB 위의 중점 C 와 원호 위의 점 D 에서 내접하고, 반지름의 길이가 r_2 인 원 γ_2 가 다른 부분에서 원 γ 에 T 에서, 현 AB 와 E 에서 접하고 원 γ 와 내접하고 있다. 원 γ_1, γ_2 의 접점 T 에서 그은 공통접선이 원 γ 와 P, Q 에서 만날 때, 선분 PQ 의 길이를 r_1, r_2 로 나타내라.

3. 자연수 n 에 대해

$\binom{n}{r} \equiv 1 \pmod{3}$ 을 만족하는 $r (0 \leq r \leq n)$ 의 개수를

a_n , $\binom{n}{r} \equiv 2 \pmod{3}$ 을 만족하는 $r (0 \leq r \leq n)$ 의 개수를 b_n 이라 하자. 일반적으로 a_n, b_n 을 구하라.

$$1. \sum_{i=1}^n \left[x_i^m \left(\frac{x_i^p}{x_i + x_i^2} \right)^{n-1} \right] \geq \sum_{i=1}^n x_i^{m+n}$$

$$2. \prod_{i=0}^n (1 + \lambda_i) = \sum_{i=0}^n \prod_{j=0}^i \lambda_j \quad \text{일 때} \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$$

④ \star ABC 는 삼각형이고 X, Y, Z 는 각각 BC, CA, AB 의 중점으로 선분 AX, BY, CZ 는 ABC 내부의 점 P 에서 만난다. 삼각형 PYZ, PZX, PXY 중 두 개가 원에 외접하면 나머지도 또한 원에 외접함을 보이라.

5. n 개의 서로 다른 두 개의 서로 다른 소인수 p, q 를 가지는 자연수이다. 다음을 만족하는 $(1, 2, \dots, n)$ 의 순열 (a_1, \dots, a_n) 이 존재함을 보이라.

$$\sum_{k=1}^n k \cos \frac{2\pi a_k}{n} = 0$$

6. 무한히 긴 복도의 한 쪽에 무한히 많은 방들이 양쪽으로 일렬로 배치되어 있다. 그 방들 안에는 피아노가 한 대씩 놓여져 있고, 유한한 수의 피아니스트들이 이들 방에서 산다. (한 방에 여러 명이 있을 수도 있다.) 매일, 연속한 두 방 (k -번째와 $k+1$ -번째 방)에 사는 두 명의 피아니스트들이, 각각 $k-1$ -번째 방과 $k+2$ -번째 방으로 옮긴다. 이와 같은 행동들이 영원히 계속되지는 못함을 증명하라.

11월 11일

11월 11일

11월 11일

11월 11일

11월 11일

11월 11일

4

21

제 6 기 겨울학교 연습문제 (1992. 1. 18)

1. $\sum_{k=c}^{n-2} x^k P_k(x^n) = \sum_{i=0}^{n-1} x^i \cdot Q(x)$ 를 만족하는
다항식, $P_k (k=0, \dots, n-2)$ 가 $(x-1)$ 로 나누어짐을 보여라.

2. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{R}^+ = \{x \mid x > 0\}$

$$\begin{cases} f(xf(y)) = yf(x) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \end{cases}$$

위 조건을 만족하는 함수를 모두 구하시오.

3. $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (x-k)^n$ 을 간단히 하시오.

4. a, b, c 는 c 이 아닌 정수이다.

$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ 이 $x=y=z=0$ 이 아닌 정수해를 가지면,
 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 은 반드시 유리해를 가짐을 증명하여라.

5. 서로 다른 n 개의 점이 평면 위에 있다.

이 때 단위 길이 만큼 떨어진 점의 쌍이
 $2n^2$ 보다 작음을 보여라

6. $\{a_n\}, \{b_n\}$ 은 $\begin{cases} a_{n+1} = 11a_n + 1 \\ b_{n+1} = 11b_n - 1 \end{cases}$ 을 만족하는 자연수열이다.
 이 때, 두 수열이 공통으로 가지는 자연수가 유한개임을 보여라.

제 (기 계를 하고 연습 문제)

(1993. 1. 19.)

1. 임의의 볼록 다각형 ($n > 3$)에 대하여, 그 변들의 길이의 평균은 그 대각선의 길이의 평균보다 작음을 증명하라.

2. $p(n)$ 는 다음의 조건을 만족하는

$3n$ 차 방정식

$$\text{이다. } \begin{cases} p(0) = p(3) = \dots = p(3n) = 2 \\ p(1) = p(4) = \dots = p(3n-2) = 1 \\ p(2) = p(5) = \dots = p(3n-1) = 0 \\ p(3n+1) = 730 \end{cases}$$

n 을 구하라.

3. 전수로 된 수열 $\{a_n\}$ 이 다음과 같이 정의되어 있다. $a_1 = 2, a_2 = 7, -\frac{1}{2} < a_{n+1} - \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \leq \frac{1}{2} \quad (n \geq 2)$ 이기 이면 a_n 은 홀수임을 증명하라.

4. 수열 $\{a_n\}$ 이 $\frac{d}{dn} a_n = 2^n$ 을 만족하도록

정의되었다고 할 때 $n \mid a_n$ 임을 보여라.
(단, n 은 자연수)

1. 어떤 유리수 c/d ($d < 100$) 가 있어서,
 $k = 1, 2, 3, \dots, 99$ 에 대해.

92/99

$$\left[k \frac{c}{d} \right] = \left[k \frac{73}{100} \right] \text{ 을 만족함을 보여라.}$$

2. 수열 $\{a_n\}$ 은

$$a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n} \text{ 을 만족한다.}$$

a_0 가 어떤 값일 때 수렴하는가? 또 그 수렴치는 얼마인가?

3. 임의의 자연수 n 에 대해

$$\left[t^{2n} \right] = \left[t \left[t^n \right] + 1 \right] \text{ 임을 증명하여라.}$$

여기서 $t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 이다.

4. 평면에서 $[1, 13] \times [1, 13]$ 에 있는 169개의 격자점을 생각한다. 이 중에서 53개의 점을 뽑았을 때, 이 중 4개는 좌표축에 평행한 직사각형의 꼭지점이 됨을 4번이 53개일 때 4개가 있을 경우를 생각하여라.

보여라.

5. n 은 $n \geq 3$ 인 정수다. 한 원 둘레 위의 서로 다른 $2n-1$ 개의 점으로 이루어진 집합을 E 라 하자. E 의 점 중에서 꼭 k 개의 점에 검은 칠을 할 때, 검은 칠을 한 것 중 적어도 한 쌍의 점이 있어서, 이 두 점을 제외한 두 개의 호 중에서 어느 하나의 호 위에 E 의 점이 꼭 n 개 있으면, " k 개가 칠이 잘 되었다." 라고 한다. 모든 k 개가 색칠이 잘 된 것이기 위한 k 의 최소값을 구하라.

(IMO 1990)

PUTNAM 1982 B-2

1. 임의의 양의 정수 n 에 대해, n 은 2의 지수승들의 합으로 표시될 수 있다. 예를 들어 8은 다음과 같이 된다.

$$8, 4+4, 4+2+2, 4+2+1+1, 2+2+2+1+1$$

여기서 한 가지가 4번 이상 쓰일 수는 없다. (2+2+2+2는 안됨)

이 때 표현의 방법 수를 $C(n)$ 이라 할 때, 모든 자연수 n 에 대해

$$C(n) = [P(n)] \text{ 을 만족하는 다항식 } P(x) \text{가 존재하는가?}$$

2. $f(n) = 1! + 2! + \dots + n!$, n 은 자연수

이 때 모든 자연수 n 에 대해 $f(n+1) = P(n)f(n+1) + Q(n)f(n)$

을 만족하는 다항식 $P(x), Q(x)$ 를 찾아라. PUTNAM 1984 B-1

3. 소수들의 크기 순서에 따라 $p_1=2, p_2=3, p_3=5, \dots$ 라 하고 $x_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ 이라 하자. 이 때 임의의 자연수 n 에 대해 $x_n < k^2 < x_{n+1}$ 을 만족시키는 정수 k 가 항상 존재함을 보여라.

4. $f(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k$: 정수 계수 다항식

어떤 자연수 m 에 대해, $k = k(m)$ 을 모든 정수 x 에 대해

$m \mid f(x)$ 를 만족하는 $f(x)$ 의 차수중 최소인 것이라 하자.

이 때 m 과 $k(m)$ 사이의 관계를 찾아라.

(Hint: $m \mid (x+1)(x+2)\dots(x+n)$)

PUTNAM 1971 A-1

5. $\triangle ABC$ 의 외심을 O , 무게 중심을 G 라 하고, AG, BG 의 연장선이 원 O 와 만나는 점을 각각 A_1, B_1 이라 하자.

이 때 A, B, G, O 가 한 원주상에 있다면 다음을 증명하라

i) $AA_1 = BB_1$

ii) $\triangle ABC$ 는 예각 삼각형