조합수학

엄상일
KAIST 수리과학과

문제 1. 어느 학교에 학생 k 명씩 속한 동아리가 m 개가 있다. 어느날 학교에 재미있는 특강이 동시에 *2*개가 서로 다른 교실에서 열리게 되었다. 만일 $m < 2^{k-1}$ 이면 각 학생들을 적당히 잘 배치하여 모든 동아리에 양쪽 교실에 각각 *1*명 이상의 회원이 가서 강연을 들을 수 있도록 할 수 있음을 보여라. *(Erdős 1963)*

문제 2. n 명의 학생들이 리그 방식으로 두 사람마다 한 번씩 경기를 하여 승자를 정하였다. 임의의 k 에 대해 n 이 충분히 크면 다음과 같은 일이 생길 수 있음을 증명하라.

임의의 k 명의 학생을 보아도 그 학생들을 동시에 이긴 다른 학생이 존재한다. *(Erdős 1963)*

문제 3. 집합 $A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, B_2, \ldots, B_m$ 이 $|A_i| = k$, $|B_i| = \ell$, $A_i \cap B_i = \emptyset$ 을 모든 i 에 대해 만족하며 서로 다른 i, j 에 대해

$$A_i \cap B_j \neq \emptyset$$

이라 한다. 이때 $m \leq \binom{k+\ell}{k}$ 임을 증명하라. *(Bollobás)*

문제 4. 집합 $A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, B_2, \ldots, B_m$ 이 $A_i \cap B_i = \emptyset$ 을 모든 i 에 대해 만족하며 서로 다른 i, j 에 대해 $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ 이거나 $A_j \cap B_i \neq \emptyset$ 이라 한다. 이때 임의의 $0 < p < 1$ 에 대해

$$\sum_{i=1}^{m} p^{|A_i|}(1-p)^{|B_i|} \leq 1$$

임을 증명하라. *(Tuza 1985)*

램지수 $R(m, n)$ 이란 임의의 N 명에 대해 서로 아는 n 명이나 서로 모르는 n 명이 반드시 존재하게 하는 최소의 N 이다.

문제 5. $R(n, 1) = 1$, $R(n, 2) = n$.

문제 6. $m, n \geq 2$ 일 때 $R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1)$.

문제 7. 모든 $k \geq 3$ 에 대해 $R(k, k) \geq \lfloor 2^{k/2} \rfloor$.

문제 8. $\{1, 2, \ldots, n\}$ 의 각 정수를 적당히 두 색으로 잘 칠하면, 같은 색으로 구성된 길이 $2\log_2 n$ 의 등차수열이 없도록 할 수 있음을 보여라. *(*공차가 0 인 것은 무시하자.*)*

문제 9. 어느 세 직선도 일직선 상에 있지 않은 평면 위의 유한개의 점의 집합 S 가 있다. S 의 점으로 만들 수 있는 볼록다각형 P 에 대해 $a(P)$ 를 P 의 꼭지점 수라 하고 $b(P)$ 를 P 바깥에 있는 S 의 점의 수라 하자. 이때 임의의 $0 < x < 1$ 에 대해

$$\sum_{P} x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1$$

임을 보이시오. 이때 $\sum_P$ 은 모든 가능한 S 에서 만들 숭 씨는 볼록다각형들을 뜻한다.$\emptyset$ 이나 점 하나, 점 두 개를 이어 만든 선분도 볼록다각형으로 친다. *(IMO Short List 2006)*

확률변수, 기대값.

문제 10. 799 개의 팀이 리그로 경기를 한다. 이때 어떤 *7*개의 팀 A 와 *7*개의 팀 B 를 잘 찾아보면 A 의 모든 팀이 B 의 모든 팀을 이긴 경우가 반드시 존재한다. *(Iran 2008)*

Date: 2015년 1월 9일 KMO 겨울학교.

sangil@kaist.edu `http://mathsci.kaist.ac.kr/~sangil/`.

문제 11. 100×100 행렬에 1부터 100까지의 수가 각각 100개씩 적혀있다. 이 때 어떤 행이나 열에는 10개 이상의 서로 다른 수가 적혀있다.

문제 12. 학생 n명 중에 서로 친구인 쌍은 m개가 있다고 한다. 이 때 학생들을 두 반으로 잘 나누어서 서로 다른 반에 속한 친구의 쌍이 $m/2$ 이상이 되게 할 수 있음을 보여라.

문제 13. n명이 참석한 어떤 파티에서 각 사람의 친구 수가 $d_1, d_2, \ldots, d_n$이라 한다. 이때 $|S| \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i+1}$이며 서로 친구가 아닌 사람들의 집합 S가 있다.

문제 14. 어떤 학교에서는 각 남학생은 적어도 한 명 이상의 여학생과 친구라고 한다. 이때 적당히 절반 이상의 학생들을 잘 뽑아서 동아리를 만들면 그 동아리 내에서는 각 남학생들은 정확히 홀수명의 여학생을 알고 있게 할 수 있음을 보여라. *(Russia 1999)*

문제 15. 1부터 100까지 정수 중에 10개의 집합 A가 주어져 있다. 이때 어떤 10개의 정수 집합을 잘 뽑으면 $a \in A$, $b \in B$를 뽑아 만들 수 있는 $a+b$를 100으로 나눈 나머지로 나타날 수 있는 수는 50개 이상임을 보여라. *(IMO Short List 1999)*

문제 16. 평면에 꼭지점 n개와 두 꼭지점 *(*서로 다른*)* 쌍을 잇는 선 m개로 그래프를 그렸을때, $m \geq 4n$이면 어떻게 그리더라도 $\frac{m^3}{64n^2}$ 이상의 선의 쌍들이 서로 교차한다.

문제 17. n명 학생들이 있는 학교에서 각 학생은 적어도 친구가 7명 이상 있다고 한다. 이때

$$|X| \leq n\left(1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{7}} + \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{8}{7}}\right) \leq 0.35n$$

이면서 X에 속하지 않은 모든 학생은 X 내에 친구가 있도록 하는 X가 존재함을 보여라.

문제 18. $R(k,k) > n - \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$

문제 19. n명의 학생들 중 각 사람의 친구 수 평균이 d라고 할 때 서로 친구 사이가 아닌 $n/(2d)$명 이상의 학생을 잘 뽑을 수 있음을 보여라. 단 $d \geq 1$이라고 한다.