조합수학

엄상일
KAIST 수리과학과 SANGIL@KAIST.EDU

1. 위 아래가 있다

문제 1. 양의 정수의 집합 $\mathbb{N}$에서 임의로 무한 개의 수 $x_1, x_2, \ldots$를 뽑으면 그 중 어떤 두 수x_i, x_j가 있어서 $x_i \le x_j$이거나 $x_i \le x_j$이다.

$\mathbb{N}^2$의 두 점 (x, y), (x', y')에 대해 $(x, y) \preceq (x', y')$를 $x \le x'$이고 $y \le y'$을 뜻하는 기호로 쓰자.

문제 2. $\mathbb{N}^2$에서 무한개의 점 $x_1, x_2, \ldots$을 뽑으면 어떤 두 점 x_i, y_i가 있어서 $x_i \preceq x_j$이거나 $x_j \preceq x_i$이다.

집합 X와 관계 $\preceq$이 아래 3개 공리를 만족할때 $(X, \preceq)$를 부분순서(partial order)라 한다.

(1) 모든 $x \in X$에 대해 $x \preceq x$.
(2) 모든 $x, y \in X$에 대해 $x \preceq y$이고 $y \preceq x$이면 $x = y$.
(3) 만일 $x \preceq y$이고 $y \preceq z$이면 $x \preceq z$.

이러한 관계가 주어진 집합 X를 부분순서집합(Partially ordered set, 줄여서 Poset)이라 한다.

예: $(2^X, \subseteq)$, 양의 정수의 집합과 $a|b$ 관계.

어떤 poset의 부분집합 Y에서 $x \preceq y$이고 $x \ne y$인 $x, y \in Y$가 하나도 없는 경우 이 Y를 antichain이라 부른다.

반대로 모든 $x, y \in Y$에 대해 $x \preceq y$이거나 $y \preceq x$인 것이 있으면 chain이라 부른다.

문제 3. $\mathbb{N}$에는 무한 크기의 *antichain*이 없다. $\mathbb{N}^2$에는 무한 크기의 *antichain*이 없다.

2. 키가 크거나 뚱뚱하다

어떤 poset X의 가장 큰 chain의 크기를 $\omega(X)$, 가장 큰 antichain의 크기를 $\alpha(X)$라 하자.

문제 4. 유한집합 X가 *poset*이면 $\alpha(X)\omega(X) \ge |X|$.

문제 5 (Erdős-Szekeres)**.** 임의의 길이 n^2+1인 서로 다른 수의 나열 $x_1, x_2, \ldots, x_{n^2+1}$에는 반드시 길이 $n+1$인 증가부분수열이 있거나 길이 $n+1$인 감소부분수열이 있다.

*(*길이 $n+1$인 증가부분수열이란 $x_{i_1} \le x_{i_2} \le \cdots \le x_{i_{n+1}}$이면서 $i_1 < i_2 < \cdots < i_{n+1}$인 것을 말한다.*)*

Date: 2013년 1월 11일 KMO 겨울학교.

문제 6 (소련수학올림피아드 1972)**.** 수직선 위에서 *50*개의 폐구간을 뽑았다. 이때 어떤 *8*개가 한 점에서 만나던가, 서로 만나지 않는 *8*개의 폐구간이 반드시 존재한다.

3. Well-quasi-order

단조감소수열이란 $a_1, a_2, \ldots$이면서 $a_1 \succ a_2 \succ a_3 \cdots$인 것을 뜻한다. $\mathbb{N}$에는 무한한 길이의 단조감소수열이 없다. 마찬가지로 $\mathbb{N}^2$에도 무한한 길이의 단조감소수열이 없다.

문제 7. $(X, \preceq)$가 부분순서라 하자. 다음 세 조건이 동치임을 보여라.

(i) X에는 무한크기의 *antichain*이 없고, 무한한 길이의 단조감소수열도 없다.
(ii) X의 원소 무한개의 수열 $a_1, a_2, \ldots$에는 반드시 $a_i \preceq a_j$인 어떤 $i < j$가 존재한다.
(iii) X의 원소 무한개의 수열 $a_1, a_2, \ldots$에는 반드시 증가하는 부분수열 $a_{i_1} \preceq a_{i_j} \preceq a_{i_3} \preceq \cdots$ $(i_1 < i_2 < \cdots)$이 있다.

(Hint: 무한그래프에 대한 램지 정리를 사용한다.*)*

문제 8 (무한그래프에 대한 램지 정리)**.** 양의 정수 k가 주어져있다. 꼭지점의 집합이 무한집합 $\{v_1, v_2, \ldots\}$인 완전그래프K_ω의 각 선에 k개 색 중에 하나씩 칠하자. 이때 임의의 두 꼭지점이 같은 색으로 이어진 꼭지점집합의 무한부분집합 $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots\}$이 존재한다.

어떤 부분순서$(X, \preceq)$가 아래 조건을 만족하면 *well-quasi-order*라 부른다.

(1) 무한크기의 antichain이 없다.
(2) 무한한 길이의 단조감소수열이 없다.

문제 9. $(X_1, \preceq_1)$와 $(X_2, \preceq_2)$가 *well-quasi-order*라 하자. $X_1 \times X_2$에서 $(x_1, x_2) \preceq (x_1', x_2')$을 $x_1 \preceq_1 x_1'$이고 $x_2 \preceq_2 x_2'$인 것으로 정의하자. $(X_1 \times X_2, \preceq)$ 역시 *well-quasi-order*임을 보여라.

문제 10. $\mathbb{N}^k$에는 무한한 크기의 *antichain*이 없다.

4. 순서를 유한수열의 순서로 확장해보기

X의 원소로 만들수 있는 모든 유한길이 수열의 집합을 $X^{<\omega}$라 하자. $(X, \preceq)$가 부분순서라면 $X^{<\omega}$에 대해서도 아래와 같은 순서를 정의해보자.

> $x_1 x_2 \cdots x_n \preceq y_1 y_2 \cdots y_m$일 필요충분조건이 $n \le m$이고 어떤 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_n \le m$이 있어서 $x_1 \preceq y_{i_1}$, $x_2 \preceq y_{i_2}$, …, $x_n \preceq y_{i_n}$인 것이다.

문제 11 (Higman's Lemma)**.** 만일 $(X, \preceq)$가 *well-quasi-order*라면 $(X^{<\omega}, \preceq)$ 역시 *well-quasi-order*이다.

문제 12 (USAMO TST 2000)**.** 양의 정수 n이 주어져 있다. n개 양의 정수의 순서쌍들의 유한집합 S가 아래 조건을 만족하면 코너라고 부르자.

> $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$가 양의 정수이고 모든 $k = 1, 2, \ldots, n$에 대해 $a_k \geq b_k$이며 $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in S$이면 $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in S$이다.

무한개의 코너를 모아놓으면 어떤 코너는 다른 코너의 부분집합이 되는 두 코너를 반드시 찾을 수 있음을 보여라.

Let n be a positive integer. A corner *is a finite set S of ordered n-tuples of positive integers such that if $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ are positive integers with $a_k \geq b_k$ for $k = 1, 2, \ldots, n$ and $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in S$, then $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in S$. Prove that among any infinite collction of corners, there exist two corners, one of which is a subset of the other one.*

문제 13. 임의의 세 꼭지점이 만드는 선의 수가 2가 되지 않는 그래프의 집합을 U라 하자. U에 속한 그래프를 무한개 뽑으면 어떤 두 그래프 G, H가 있어서 H에서 꼭지점 몇 개를 지우면 G와 똑같게 *(isomorphic*하게*)* 만들 수 있다. *(*꼭지점을 지울때는 이어진 선도 모두 지운다.*)*

5. 수형도(TREE)의 포함관계

문제 14. 그래프 T_1, T_2에 대해 $T_1 \preceq T_2$를 T_1에서 선에 여러 개의 꼭지점을 추가하는 연산을 반복해서 얻은 그래프가 T_2의 부분그래프가 되는 것을 뜻한다고 하자. 모든 수형도의 집합을 $\mathcal{T}$라 하자. 이때 $(\mathcal{T}, \preceq)$는 *well-quasi-order*이다.

6. Dilworth의 정리

문제 15. 유한집합 P가 부분순서집합이라 하자. P의 *antichain* 중 가장 큰 것의 크기는 P를 *chain*으로 분할할 때 필요한 *chain*의 수의 최소값과 같다.

7. 홀의 결혼 정리

Dilworth 정리를 이용하면 아래 정리를 증명할 수 있다.

문제 16 (홀의 결혼 정리)**.** 여자들의 집합 A, 남자들의 집합 B가 있고 각 여자들별로 짝을 하고 싶은 남자들을 적어냈다고 하자. 만일 임의의 A의 부분집합 X에 속한 여자들이 한 명이라도 지명한 남자들의 수가 $|X|$이상이라고 하면 각 여자들에게 자기들이 원하는 남자들을 서로 다르게 지정해줄 수 있다.

문제 17. 모든 여자들이 정확히 k명의 남자들을 좋아하고 각 남자들은 정확히 k명의 여자들이 좋아해준다면 각 여자들에게 자기들이 좋아하는 남자 중 한 명을 서로 다르게 정해줄 수 있다.

문제 18. 2이상의 짝수인 정수 k가 주어져있다. 어떤 파티에서 모든 사람이 정확히 k번 악수했다면, 파티가 끝난 후 사람들을 *1*개 이상의 원형으로 잘 배치하면 이웃한 사람들끼리는 악수한 사이가 되도록 할 수 있다.

8. ANTICHAIN은 많아야 몇개까지 가능한가?

문제 19 (Sperner 1928)**.** 원소 n개인 집합 $\{1, 2, \ldots, n\}$의 부분집합들로 이루어진 *poset*의 *antichain*을 A라 하면 $|A| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

문제 20 (레닌그라드 수학올림피아드 1987. LYM 부등식)**.** 원소 n개인 집합 $\{1, 2, \ldots, n\}$의 부분집합들로 이루어진 *poset*의 *antichain*을 A라 하면 $\sum_{X \in A} \frac{1}{\binom{n}{|X|}} \leq 1$.

문제 21 (Bollobás 1965)**.** $\{1, 2, \ldots, n\}$의 부분집합 $A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, B_2, \ldots, B_m$이 아래 두 조건을 만족시킨다고 하자.

(i) 모든 i에 대해 $A_i \cap B_i = \emptyset$.
(ii) 모든 $i \neq j$에 대해 $A_i \cap B_j \neq \emptyset$.

이때 다음 부등식을 증명하라.

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{|A_i| + |B_i|}{|A_i|}} \leq 1.$$

(참고: $i \neq j$를 $i < j$로 바꿔도 성립한다. 단 증명은 더 복잡)

9. 서로 만나는 집합들 많이 모으기

문제 22. $\{1, 2, \ldots, n\}$의 부분집합들의 집합 $\mathcal{F}$가 다음 성질을 만족한다고 하자.

$$A, B \in \mathcal{F} \text{이면 } A \cap B \neq \emptyset.$$

이때 $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$임을 보여라.

문제 23 (Erdős-Ko-Rado)**.** k는 $n/2$이하의 양의 정수라 하자. $\{1, 2, \ldots, n\}$의 부분집합들의 집합 $\mathcal{F}$가 다음 성질을 만족한다고 하자.

(1) $A, B \in \mathcal{F}$이면 $A \cap B \neq \emptyset$.
(2) $A \in \mathcal{F}$이면 $|A| = k$.

이때 $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$임을 보여라.

10. 부분집합들 구분하기

문제 24 (Bondy)**.** $\{1, 2, \ldots, n\}$의 서로 다른 부분집합 n개 $A_1, A_2, \ldots, A_n$이 있다고 하자. 이때 $A_1 \setminus \{x\}, A_2 \setminus \{x\}, \ldots, A_n \setminus \{x\}$가 서로 다르게 하는 $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$가 존재함을 증명하라.