수학적 귀납법

엄상일
KAIST 수리과학과

1. 수학적 귀납법 기초

수학적 귀납법: 어떤 명제 $P(n)$이,
(i) (basis step) $n = 1$일때 참이고,
(ii) (inductive step) $n = k$일때 참이면 $n = k + 1$일때도 참
이면 주어진 n에 관한 명제는 모든 $n \geq 1$에 대해 참이다.

강한 수학적 귀납법: 어떤 명제 $P(n)$이,
(i) (basis step) $n = 1$일때 참이고,
(ii) (inductive step) $n \leq k$일때 참이면 $n = k + 1$일때도 참
이면 주어진 n에 관한 명제는 모든 $n \geq 1$에 대해 참이다.

Well-ordering 성질: 임의의 자연수 집합의 공집합 아닌 부분집합은 항상 최소원소가 있다.

$$\forall X \subseteq \mathbb{N}, X \neq \emptyset \Rightarrow X\text{는 최소 원소를 가짐}$$

Q 1. *Well-ordering* 성질로 수학적 귀납법 원리 증명하라.

Q 2. 수학적 귀납법 원리로 *well-ordering* 성질 증명하라.

Q 3. 수학적 귀납법 원리로 강한 수학적 귀납법 증명하라.

수학적 귀납법으로 증명할 때 가장 중요한 것들

(1) n을 고르는 것은 자유 — 주어진 상황에서 자연수를 만드는 방법을 아무렇게나 골라서 수학적 귀납법을 적용할 수 있다.
(2) 작은 경우를 변형하여 큰 경우를 만들어내라는 뜻이 아님! 수학적 귀납법은 작은 경우가 풀린 것을 "보조정리"로 활용하여 큰 경우를 해결하라는 뜻임!
(3) "최소 반례"를 잡아 풀기⇔ "수학적 귀납법"
(4) 귀납법 가정을 여러번 적용하는 경우도 많다.

문제 1. $2^n \times 2^n$ 체스판에서 임의의 칸을 하나 빼더라도, 나머지 칸을 *3*개 칸으로 구성된 ㄱ자 모양의 말로 겹치지 않게 가득 채울 수 있음을 보여라.

문제 2. 임의의 1 아닌 자연수는 소수 여러개의 곱으로 쓸 수 있음을 보여라.

문제 3. 무한히 넓은 체스판에 대부분의 칸은 흰색, n개 칸은 검은색으로 칠해져있다고 한다. 시간이 *1*초 지날 때마다, 각 칸의 색깔이, 그 칼 위칸, 오른쪽, 그리고 그 자신 색깔 *3*개 중 많은 색의 색으로 바뀐다고 하자. n초가 지나면 모든 칸이 흰색이 됨을 증명하라.

Date: 2012년 7월 28일 KMO 여름학교 (중등부).

2. 이항정리와 포함과 배제의 원리

문제 4. $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

문제 5.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\},|I|=k} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| \right).$$

3. 산술기하평균 부등식

문제 6. $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ 일때,

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

4. 그래프

문제 7. n 명의 사람들이 모인 파티에서 각 사람이 $n/2$ 명 이상 알고 있었다. 이때 이웃한 사람끼리 서로 알도록 모든 사람을 하나의 원 위에 배치할 수 있음을 보여라.

(틀린 증명의 예를 토론하자.)

V가 점들의 유한집합이고 E가 V의 두 꼭지점을 잇는 선들의 집합이라 할때 이 순서쌍 $G = (V, E)$를 그래프라 한다. 그래프 $G = (V, E)$에 대해 $E(G) = E$, $V(G) = V$ 라 하자. 예: $(\{1, 2, 3, 4\}, \{12, 23, 34\})$

두 점을 잇는 선이 있으면 그 두 점은 이웃한다고 하자.

편의상 단순그래프, 즉 같은 두 점을 잇는 선은 두 개 이상 없는 경우만 고려하자.

서로 다른 점들의 나열 $v_0 = v, v_1, v_2, \ldots, v_k = w$이 각각의 i에 대해 $v_i v_{i+1}$은 그래프 G의 선이면, 이 점들의 나열을 G의 경로라 한다.

점들의 나열 $v_0 = v, v_1, v_2, \ldots, v_k = v$이 각각의 i에 대해 $v_i v_{i+1}$은 그래프 G의 선이고, $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$이 서로 다른 경우, 이 점들의 나열을 G의 회로라 한다.

임의의 두 점을 잇는 경로가 존재할 때, 그 그래프는 연결된 그래프라 한다.

문제 8. 회로가 없는 연결된 그래프를 수형도라 하자. 어떤 그래프 T가 수형도라면 $|V(T)| = |E(T)| + 1$. 즉 점의 수는 선의 수보다 항상 *1* 많음을 보여라.

(잘못된 증명의 예를 토론하자.)

그래프의 어떤 점의 차수란, 그 점에 이어진 선의 수를 뜻한다.

문제 9. 모든 수형도에는 차수가 *1* 이하인 점이 있음을 보여라.

문제 10. 선이 홀수개인 회로가 없는 그래프는 반드시 점의 집합을 적당히 *A, B*로 잘 나누면 어떤 선도 A나 B 한 쪽의 두 점을 잇지 않게 할 수 있음을 보여라. *(이러한 그래프를 이분그래프라 한다.)*

문제 11 (KMO2010)**.** 총 n명 $(n \geq 4)$의 외교관들이 모여 있다. 임의의 네 외교관 *A, B, C, D*에 대하여 A와 B가 악수를 했고, B와 C가 악수를 했으며 C와 D가 악수를 했다면, 세 쌍 A와 *C, A*와 *D, B*와 D중 악수를 했던 쌍이 반드시 존재하였다. 이때 어떤 두 외교관 *A, B*가 있어서, *A, B* 이외의 외교관 중에 A와 악수한 사람들의 모임과 B가 악수한 사람들의 모임이 같음을 보여라.

5. 게임의 승자

문제 12. $n \times m$ 바둑판에서 두 명의 사람이 바둑알을 교대로 한 칸씩 이동하는 게임을 한다. 처음에 바둑알이 제일 왼쪽 아래에 있고, 한번이라도 사용했던 '선'은 다시 쓸 수 없다고 한다. 더 이상 바둑알을 옮길 수 없는 사람이 진다고 할때, 첫번째 사람이 반드시 이길 수 있는 전략이 존재할 필요충분조건을 구하여라.

문제 13. 위 문제에서 선을 점으로 바꿀 경우 첫번째 사람이 반드시 이길 수 있는 전략이 존재할 필요충분조건은 무엇이겠는가?

문제 14. n은 2 이상의 정수라 하자.. 두 사람이 교대로 0 혹은 1을 써나가는 게임을 한다. 이때 만일 마지막에 쓴 숫자로 끝나는 n개의 숫자들 블럭이 나타난 적이 있는 경우 그 사람이 진다고 하자. 예를 들어 $n = 4$이고 0010000110101110011이면 0011이 처음 반복되었으므로 두 번째 사람이 진다.

(a) 이 게임은 반드시 승자가 결정됨을 증명하라.
(b) n이 홀수인 경우 두번째 사람이 반드시 이길 수 있는 전략이 존재함을 보여라.
참고 : $n = 4$일때는 첫번째 사람이 반드시 이길 수 있다. $n > 4$이고 짝수라면?

6. 홀의 결혼 정리

그래프에서 임의의 두 선이 서로 만나지 않는 선들의 집합을 매칭이라 한다.

문제 15 (홀의 결혼 정리)**.** 어느 학교에서 모든 여학생이 각자 같이 앉고 싶은 남학생 목록을 제출하였다. 이때 모든 여학생의 희망이 만족되도록 짝을 나눌 수 있을 필요충분조건은 아래와 같음을 증명하라.

> 여학생 집합의 부분집합 X를 아무렇게나 뽑더라도 그 여학생들 중 한 명 이상이 앉고 싶다고 한 남학생의 수가 $|X|$명 이상이다.

그래프의 매칭이란 서로 만나지 않는 선들의 집합이다. 어떤 점들의 집합 X에 대해 $N(X)$란 X에 속한 점들의 이웃들의 집합이다. 위 문제를 다시 쓰면 아래와 같다.

문제 16. A, B로 나뉜 이분그래프 G가 있다. G에 A의 모든 점을 만나는 매칭이 존재할 필요충분조건은 모든 A의 부분집합X에 대해 $|N(X)| \geq |X|$임이다.

수학적 귀납법 변수를 다양하게 잡은 증명이 가능하다!

문제 17. 남자 n명, 여자 n명이 있다. 파티 중 정전이 되고 불이 켜진 후 알고보니 모든 사람이 각각 뽀뽀를 정확하게 k번 하였다고 한다. 남녀간에만 뽀뽀를 하였다고 할 때, 뽀뽀한 사람들끼리 짝지어서 결혼을 n쌍 시킬 수 있다.

Q 4. 만일 남남, 혹은 여여 간에도 뽀뽀를 할 수 있다면 위 문제는 맞겠는가?

문제 18. P를 각 행, 각 열에 1이 하나씩만 있는 0과 1로만 구성된 $n \times n$ 행렬의 집합이라 하자.

어떤 $n \times n$ 행렬 M의 모든 행, 모든 열 각각의 합이 같았다고 하자. 이때 M은 P에 속한 행렬에 적당한 값을 곱한 것들을 더하여 얻을 수 있음을 보여라.

7. 색칠

그래프의 색칠이란 각 점에 색을 정하되, 이웃한 점은 다른 색이 칠해지도록 하는 것을 뜻한다. 그래프의 채색수(chromatic number)란 k개의 색으로 그래프를 색칠할 수 있을 최소의 k값을 뜻한다.

문제 19. 모든 점의 차수가 k 이하인 그래프는 $k+1$개 색으로 색칠할 수 있다.

문제 20. 평면에 교차점 없이 그릴 수 있는 모든 그래프는 5개 이하의 색으로 칠할 수 있다. *(*이러한 그래프를 평면그래프라 한다.*)*

참고: (4색정리) 평면 그래프는 항상 4개 색으로 칠할 수 있다.

8. 불변량 아이디어

문제 21. k개 색으로 칠할 수 있는 점 n개짜리 그래프 G가 있다고 하자. 만일 색깔이 $m(m<k)$개만 주어져있다고 하자. 이때 $\left(\frac{k-1}{k}\right)^m n$개 이하의 점을 잘 지우면 남은 그래프는 m개 색으로 색칠할 수 있음을 보여라.

문제 22. *(IMO2012)* 두 명의 선수 A와 B가 거짓말쟁이 추측 게임을 한다. 이 게임의 룰은 두 양의 정수 k와 n에 의해 결정되고 이 숫자들을 선수들은 미리 알고 있다.

게임이 시작될 때 A는 먼저 양의 정수 x와 N을 *(*단, $x \le N$*)* 선택한 후, A는 B에게 x는 감추고 N은 무엇인지 정직하게 알려 준다. B는 x에 대한 정보를 얻기 위해 다음과 같은 방식으로 A에게 질문들을 한다. B는 각 질문마다 양의 정수로 이루어진 집합 S을 지정해 그것이 무엇인지 설명한 후 *(*이전에 지정한 집합과 같아도 상관없다*)*, x가 그 집합에 속하는 지 물어 본다. B는 원하는 만큼 얼마든지 여러 번 질문할 수 있다. A는 B가 질문할 때마다 '예' 또는 '아니오'로 즉시 답을 해야 한다. 단, A는 몇 번이고 거짓으로 대답할 수 있다. 하지만, A는 임의의 $k+1$번의 연속한 B의 질문에 대하여 적어도 한 번은 정직하게 대답하여야 한다.

B는 원하는 만큼 충분히 여러 번 질문한 후, n개 이하의 양의 정수로 이루어진 집합 X를 제시하여야 한다. 이때, x가 X에 속하면 B가 이기고, 그렇지 않으면 B가 진다. 다음을 각각 보여라.

(1) $n \ge 2^k$이면, B의 필승 전략이 존재한다.

(2) 충분히 큰 모든 k에 대하여, B의 필승 전략이 존재하지 않는 어떤 정수 $n \ge 1.99^k$이 존재한다.