

# 수학적 귀납법

엄상일  
KAIST 수리과학과

## 1. 수학적 귀납법 기초

**수학적 귀납법:** 어떤 명제  $P(n)$ 이,

(i) (basis step)  $n = 1$  일때 참이고,

(ii) (inductive step)  $n = k$  일때 참이면  $n = k + 1$  일때도 참이면 주어진  $n$ 에 관한 명제는 모든  $n \geq 1$ 에 대해 참이다.

**강한 수학적 귀납법:** 어떤 명제  $P(n)$ 이,

(i) (basis step)  $n = 1$  일때 참이고,

(ii) (inductive step)  $n \leq k$  일때 참이면  $n = k + 1$  일때도 참이면 주어진  $n$ 에 관한 명제는 모든  $n \geq 1$ 에 대해 참이다.

**Well-ordering 성질:** 임의의 자연수 집합의 공집합 아닌 부분집합은 항상 최소원소가 있다.

$$\forall X \subseteq \mathbb{N}, X \neq \emptyset \Rightarrow X \text{는 최소 원소를 가짐}$$

**Q 1.** *Well-ordering* 성질로 수학적 귀납법 원리 증명하라.

**Q 2.** 수학적 귀납법 원리로 *well-ordering* 성질 증명하라.

**Q 3.** 수학적 귀납법 원리로 강한 수학적 귀납법 증명하라.

수학적 귀납법으로 증명할 때 가장 중요한 것들

- (1)  $n$ 을 고르는 것은 자유 — 주어진 상황에서 자연수를 만드는 방법을 아무렇게나 골라서 수학적 귀납법을 적용할 수 있다.
- (2) 작은 경우를 변형하여 큰 경우를 만들어내라는 뜻이 아님! 수학적 귀납법은 작은 경우가 풀린 것을 “보조정리”로 활용하여 큰 경우를 해결하라는 뜻임!
- (3) “최소 반례”를 잡아 풀기  $\Leftrightarrow$  “수학적 귀납법”
- (4) 귀납법 가정을 여러번 적용하는 경우도 많다.

**문제 1.**  $2^n \times 2^n$  체스판에서 임의의 칸을 하나 빼더라도, 나머지 칸을 3개 칸으로 구성된  $\Gamma$ 자 모양의 말로 겹치지 않게 가득 채울 수 있음을 보여라.

**문제 2.** 임의의 1 아닌 자연수는 소수 여러개의 곱으로 쓸 수 있음을 보여라.

**문제 3.** 무한히 넓은 체스판에 대부분의 칸은 흰색,  $n$ 개 칸은 검은색으로 칠해져있다고 한다. 시간이 1초 지날 때마다, 각 칸의 색깔이, 그 칸 위칸, 오른쪽, 그리고 그 자신 색깔 3개 중 많은 색의 색으로 바뀐다고 하자.  $n$ 초가 지나면 모든 칸이 흰색이 됨을 증명하라.

## 2. 이항정리와 포함과 배제의 원리

문제 4.  $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$

문제 5.

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n \left( (-1)^{k-1} \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, |I|=k} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \right).$$

## 3. 산술기하평균 부등식

문제 6.  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  일때,

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

## 4. 그래프

문제 7.  $n$  명의 사람들이 모인 파티에서 각 사람이  $n/2$  명 이상 알고 있었다. 이때 이웃한 사람 끼리 서로 알도록 모든 사람을 하나의 원 위에 배치할 수 있음을 보여라.

(틀린 증명의 예를 토론하자.)

$V$ 가 점들의 유한집합이고  $E$ 가  $V$ 의 두 꼭지점을 잇는 선들의 집합이라 할때 이 순서쌍  $G = (V, E)$ 를 그래프라 한다. 그래프  $G = (V, E)$ 에 대해  $E(G) = E$ ,  $V(G) = V$ 라 하자. 예:  $(\{1, 2, 3, 4\}, \{12, 23, 34\})$

두 점을 잇는 선이 있으면 그 두 점은 이웃한다고 하자.

편의상 단순그래프, 즉 같은 두 점을 잇는 선은 두 개 이상 없는 경우만 고려하자.

서로 다른 점들의 나열  $v_0 = v, v_1, v_2, \dots, v_k = w$ 이 각각의  $i$ 에 대해  $v_i v_{i+1}$ 은 그래프  $G$ 의 선이면, 이 점들의 나열을  $G$ 의 경로라 한다.

점들의 나열  $v_0 = v, v_1, v_2, \dots, v_k = v$ 이 각각의  $i$ 에 대해  $v_i v_{i+1}$ 은 그래프  $G$ 의 선이고,  $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}$ 이 서로 다른 경우, 이 점들의 나열을  $G$ 의 회로라 한다.

임의의 두 점을 잇는 경로가 존재할 때, 그 그래프는 연결된 그래프라 한다.

문제 8. 회로가 없는 연결된 그래프를 수형도라 하자. 어떤 그래프  $T$ 가 수형도라면  $|V(T)| = |E(T)| + 1$ . 즉 점의 수는 선의 수보다 항상 1 많음을 보여라.

(잘못된 증명의 예를 토론하자.)

그래프의 어떤 점의 차수란, 그 점에 이어진 선의 수를 뜻한다.

문제 9. 모든 수형도에는 차수가 1 이하인 점이 있음을 보여라.

문제 10. 선이 홀수개인 회로가 없는 그래프는 반드시 점의 집합을 적당히  $A, B$ 로 잘 나누면 어떤 선도  $A$ 나  $B$  한 쪽의 두 점을 잇지 않게 할 수 있음을 보여라. (이러한 그래프를 이분그래프라 한다.)

문제 11 (KMO2010). 총  $n$ 명 ( $n \geq 4$ )의 외교관들이 모여 있다. 임의의 네 외교관  $A, B, C, D$ 에 대하여  $A$ 와  $B$ 가 악수를 했고,  $B$ 와  $C$ 가 악수를 했으며  $C$ 와  $D$ 가 악수를 했다면, 세 쌍  $A$ 와  $C$ ,  $A$ 와  $D$ ,  $B$ 와  $D$ 중 악수를 했던 쌍이 반드시 존재하였다. 이때 어떤 두 외교관  $A, B$ 가 있어서,  $A, B$  이외의 외교관 중에  $A$ 와 악수한 사람들의 모임과  $B$ 가 악수한 사람들의 모임이 같음을 보여라.

5. 게임의 승자

**문제 12.**  $n \times m$  바둑판에서 두 명의 사람이 바둑알을 교대로 한 칸씩 이동하는 게임을 한다. 처음에 바둑알이 제일 왼쪽 아래에 있고, 한번이라도 사용했던 '선'은 다시 쓸 수 없다고 한다. 더 이상 바둑알을 옮길 수 없는 사람이 진다고 할때, 첫번째 사람이 반드시 이길 수 있는 전략이 존재할 필요충분조건을 구하여라.

**문제 13.** 위 문제에서 선을 점으로 바꿀 경우 첫번째 사람이 반드시 이길 수 있는 전략이 존재할 필요충분조건은 무엇이겠는가?

**문제 14.**  $n$ 은 2 이상의 정수라 하자.. 두 사람이 교대로 0 혹은 1을 써나가는 게임을 한다. 이때 만일 마지막에 쓴 숫자로 끝나는  $n$ 개의 숫자들 블럭이 나타난 적이 있는 경우 그 사람이 진다고 하자. 예를 들어  $n = 4$ 이고 00100001101011110011 이면 0011이 처음 반복되었으므로 두 번째 사람이 진다.

(a) 이 게임은 반드시 승자가 결정됨을 증명하라.

(b)  $n$ 이 홀수인 경우 두번째 사람이 반드시 이길 수 있는 전략이 존재함을 보여라.

참고:  $n = 4$ 일때는 첫번째 사람이 반드시 이길 수 있다.  $n > 4$ 이고 짝수라면?

6. 홀의 결혼 정리

그래프에서 임의의 두 선이 서로 만나지 않는 선들의 집합을 매칭이라 한다.

**문제 15** (홀의 결혼 정리). 어느 학교에서 모든 여학생이 각자 같이 앉고 싶은 남학생 목록을 제출하였다. 이때 모든 여학생의 희망이 만족되도록 짝을 나눌 수 있을 필요충분조건은 아래와 같음을 증명하라.

여학생 집합의 부분집합  $X$ 를 아무렇게나 뽑더라도 그 여학생들 중 한 명 이상이 앉고 싶다고 한 남학생의 수가  $|X|$ 명 이상이다.

그래프의 매칭이란 서로 만나지 않는 선들의 집합이다. 어떤 점들의 집합  $X$ 에 대해  $N(X)$ 란  $X$ 에 속한 점들의 이웃들의 집합이다. 위 문제를 다시 쓰면 아래와 같다.

**문제 16.**  $A, B$ 로 나뉜 이분그래프  $G$ 가 있다.  $G$ 에  $A$ 의 모든 점을 만나는 매칭이 존재할 필요충분조건은 모든  $A$ 의 부분집합  $X$ 에 대해  $|N(X)| \geq |X|$ 임이다.

수학적 귀납법 변수를 다양하게 잡은 증명이 가능하다!

**문제 17.** 남자  $n$ 명, 여자  $n$ 명이 있다. 파티 중 정전이 되고 불이 켜진 후 알고보니 모든 사람이 각각 뽀뽀를 정확하게  $k$ 번 하였다고 한다. 남녀간에만 뽀뽀를 하였다고 할 때, 뽀뽀한 사람들끼리 짝지어서 결혼을  $n$ 쌍 시킬 수 있다.

**Q 4.** 만일 남남, 혹은 여여 간에도 뽀뽀를 할 수 있다면 위 문제는 맞겠는가?

**문제 18.**  $P$ 를 각 행, 각 열에 1이 하나씩만 있는 0과 1로만 구성된  $n \times n$  행렬의 집합이라 하자. 어떤  $n \times n$  행렬  $M$ 의 모든 행, 모든 열 각각의 합이 같았다고 하자. 이때  $M$ 은  $P$ 에 속한 행렬에 적당한 값을 곱한 것들을 더하여 얻을 수 있음을 보여라.

## 7. 색칠

그래프의 색칠이란 각 점에 색을 정하되, 이웃한 점은 다른 색이 칠해지도록 하는 것을 뜻한다. 그래프의 채색수(chromatic number)란  $k$ 개의 색으로 그래프를 색칠할 수 있을 최소의  $k$ 값을 뜻한다.

**문제 19.** 모든 점의 차수가  $k$  이하인 그래프는  $k + 1$ 개 색으로 색칠할 수 있다.

**문제 20.** 평면에 교차점 없이 그릴 수 있는 모든 그래프는 5개 이하의 색으로 칠할 수 있다. (이러한 그래프를 평면그래프라 한다.)

참고: (4색정리) 평면 그래프는 항상 4개 색으로 칠할 수 있다.

**문제 21.**  $k$ 개 색으로 칠할 수 있는 점  $n$ 개짜리 그래프  $G$ 가 있다고 하자. 만일 색깔이  $m$  ( $m < k$ ) 개만 주어졌다고 하자. 이때  $\binom{k-1}{m} n$ 개 이하의 점을 잘 지우면 남은 그래프는  $m$ 개 색으로 색칠할 수 있음을 보여라.