월요일, 2018년 7월 9일

문제 1. 예각삼각형 ABC의 외접원을 Γ라 하자. 점 D와 E는 각각 변 AB와 AC 위에 있고 $AD = AE$를 만족한다. 선분 BD와 CE의 수직이등분선이 Γ의 호 $\widehat{AB}$ 중 작은 호, 호 $\widehat{AC}$ 중 작은 호와 각각 점 F, G에서 만난다. 두 직선 DE와 FG가 평행함(또는 일치함)을 보여라.

문제 2. 다음 조건을 만족하는 실수 $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$가 존재하는 정수 $n \geq 3$을 모두 구하여라.

(조건) $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$이고, $i = 1, 2, \ldots, n$에 대하여

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

이다.

문제 3. 정수들의 다음과 같은 정삼각형 모양의 나열을 **역파스칼삼각형**이라 하자: 가장 밑줄에 있는 수들을 제외하고, 나머지 각 수들은 바로 밑에 있는 두 수의 차(의 절대값)이다. 예를 들어, 다음 나열은 네 개의 가로줄로 이루어지고 1부터 10까지의 모든 수가 등장하는 역파스칼삼각형이다.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

2018개의 가로줄로 이루어지고 1부터 $1 + 2 + \cdots + 2018$까지의 모든 수가 등장하는 역파스칼삼각형이 존재하겠는가?

화요일, 2018년 7월 10일

문제 4. 좌표평면 위의 점 (x, y)에 대하여, x와 y가 모두 20 이하의 양의 정수일 때, 이 점을 **지점**이라 하자.

400개의 지점이 처음엔 모두 비어 있다. 수영과 상일이 번갈아 빈 지점에 돌을 놓고, 수영이 먼저 시작한다. 수영은 자기 차례에 빈 지점에 새로운 빨간 돌 하나를 놓되, 빨간 돌이 놓인 어떤 두 지점 사이의 거리도 $\sqrt{5}$가 되지 않도록 놓는다. 상일은 자기 차례에 빈 지점에 새로운 파란 돌 하나를 놓는다. (파란 돌은, 돌이 놓여 있는 지점과의 거리에 상관없이, 빈 지점 어디에나 놓을 수 있다.) 이 게임은 한 사람이 더 이상 돌을 놓을 수 없을 때까지 진행한다.

상일이 어떤 전략으로 파란 돌들을 놓든지 상관없이, 수영이 항상 최소한 K개의 빨간 돌을 놓을 수 있는 K 값 중 가장 큰 값을 구하여라.

문제 5. 양의 정수들의 무한수열 $a_1, a_2, \ldots$에 대하여 다음 조건을 만족하는 정수 $N > 1$이 존재한다고 하자.

(조건) 모든 $n \geq N$에 대하여

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

이 정수이다.

다음을 만족하는 양의 정수 M이 존재함을 보여라.

모든 $m \geq M$에 대하여, $a_m = a_{m+1}$ 이다.

문제 6. 볼록사각형 $ABCD$가 $AB \cdot CD = BC \cdot DA$를 만족한다. 사각형 $ABCD$의 내부에 있는 점 X가 두 등식

$$\angle XAB = \angle XCD, \qquad \angle XBC = \angle XDA$$

를 만족한다. 이때, $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$ 임을 보여라.

Language: Korean

제한시간: 4시간 30분
문항당 7점